

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Partie I

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.

On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie II

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à 0,95.

Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives : $a_0 = 1$; $a_1 = e^{\frac{i\pi}{12}}$.

Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

1.
 - a. Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
 - b. Soit I le milieu du segment $[A_0A_2]$. Calculer l'affixe du point I .
 - c. Faire une figure.
2.
 - a. Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
 - b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I .
 - c. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Exercice 2

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

Déterminer les paires $\{a ; b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier $(n-1)! + 1$ est-il pair ?
3. L'entier $(n-1)! + 1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier $(15-1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.
5. L'entier $(11-1)! + 1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geq 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q ($1 < q < p$) qui divise $(p-1)$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)! + 1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)! + 1$?

Problème**11 points****Commun à tous les candidats**

On considère la fonction numérique f définie sur $] -\infty ; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'unité graphique étant 2 cm.

Partie I

1. **a.** Soit $X = \frac{2}{x-1}$.
Prouver l'égalité : $\frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2} X^2 e^X$.
En déduire la limite de f quand x tend vers 1.
- b.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- c.** En déduire une asymptote à la courbe Γ .
2. **a.** Soit v la fonction numérique définie sur $] -\infty ; 1[$ par :

$$v(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Calculer $v'(x)$.

- b.** Démontrer que $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
3. Étudier les variations de f .
4. Tracer la courbe (Γ) .

Partie II

1. Déterminer une primitive de f sur $] -\infty ; 1[$.
2. Soit α réel tel que $0 < \alpha < 1$, déterminer :

$$g(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx.$$

3. Quelle est la limite de $g(\alpha)$ quand α tend vers 1 ?
4. Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe de f , l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = -\alpha$ et $x = \alpha$?

Partie III

1. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est -1.
On notera β l'autre solution.

- b.** Donner un encadrement de largeur 10^{-2} de β .
- 2.** Soit a un élément de $] -\infty ; 1[$.
Déterminer graphiquement, en fonction de a , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$.