Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1998

Exercice 1 **4 points**

Le plan est rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ orthonormal direct ; unité graphique 2 centimètres.

On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Soit I le point d'affixe 2i.

On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \text{i}z$.

1. **a.** Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer l'affixe du point A$'$, image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+\text{i}$.

c. Montrer que les points A, I et A$'$ sont alignés.

2. **a.** Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1+\text{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b. Vérifier que le point A appartient à (Γ).

c. Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ).

3. Soit B le point d'affixe $2+2\text{i}$ et B' l'image de B par f.

a. Démontrer que les droites (AB) et (AB') sont perpendiculaires.

b. Soit C le point d'intersection des droites (AB) et (A'B). Déterminer la nature du quadrilatère OACA$'$.

Exercice 2 **5 points**

Dans le plan (P), on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1)}.

2. On désigne le point M un point quelconque de (P).

a. Montrer que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}$ est un vecteur dont la norme est 8.

b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \|\vec{V}\|$$

3. On considère le système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n)} où n est un entier naturel fixé.

a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2.

b. Montrer que le point G_n appartient au segment [AH].

c. Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.

Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.

d. Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + n\overrightarrow{M\text{B}} + n\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = n\left\|\vec{V}\right\|.$$

Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A.

En préciser le centre et le rayon, noté R_n.

e. Construire E_2.

Exercice 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.

On considère les points A(1 ; 0), C(0 ; 1), D(0 ; - 1) et le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit M un point du cercle (Γ), d'ordonnée positive ou nulle, et distinct de C.

La droite (DM) rencontre l'axe des abscisses au point I.

Le point N est le point d'intersection de la droite (OM) et de la parallèle à la droite (CD) passant par I.

1. Réaliser la figure.
2. On note t une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
   On se propose de déterminer l'ensemble (F) décrit par le point N lorsque t décrit l'intervalle $[0 ; \pi]$ privé de $\frac{\pi}{2}$.
   a. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t.
   b. Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\frac{\cos t}{1+\sin t} ; 0\right)$ puis que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de N sont :
   $$x(t) = \frac{\cos t}{1+\sin t} \quad y(t) = \frac{\sin t}{1+\sin t}$$
3. **a.** Comparer d'une part $x(t)$ et $x(\pi - t)$, puis d'autre part $y(t)$ et $y(\pi - t)$.
   En déduire une propriété géométrique de l'ensemble (F).
   b. Faire l'étude conjointe des variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
   c. Déterminer les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$.
4. **a.** Calculer, en fonction de t, la distance ON puis la distance de N à la droite d'équation $y = 1$.
   b. En déduire que (F) est inclus dans une conique dont on précisera la nature et les éléments.
   c. Tracer l'ensemble (F).

Problème **11 points**

Partie A

⋆ **Résolution d'une équation différentielle**

(Hors programme depuis 1998.)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$.
   Vérifier que le polynôme h défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E), c'est-à-dire que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$.
3. **a.** Montrer que si f est solution de (E), c'est-à-dire, si pour tout x réel, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$, alors la fonction g, telle que $g = f - h$, est solution de (E_0).

b. Réciproquement, montrer que si g est solution de (E_0) alors la fonction f, telle que $f = g + h$, est solution de (E).

c. En déduire la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire une solution φ de (E) satisfaisant à $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 0$.

Partie B

⋆ **Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = x^2 - 2(x-1)\text{e}^{(x-1)}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; (unité graphique. 2 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra montrer que

$$f(x) = \text{e}\left(\frac{x^2}{\text{e}^x} - \frac{2x}{\text{e}} + \frac{2}{\text{e}}\right).$$

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique. On note α cette solution.

b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]\,1,7\,;\,1,8[$.

3. On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.

a. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (Γ).

b. Calculer la limite de $f(x) - x^2$ quand x tend vers $-\infty$.

4. Tracer sur une feuille de papier millimétré, la courbe $(\mathscr{C})$ et la parabole (Γ).

Partie C

⋆ **Calculs d'aires**

Soit a un nombre réel strictement inférieur à 1. On appelle D_a le domaine du plan limité par les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.
On note $\text{A}(a)$ l'aire du domaine D, exprimée en unités d'aire.

1. Montrer que $\text{A}(a) = 2(a-1)\text{e}^{(a-1)} - 2\text{e}^{(a-1)} + 2$.
(On pourra utiliser une intégration par parties).

2. Calculer l'aire $\text{A}(0)$ du domaine D.

3. Déterminer la limite de $\text{A}(a)$ quand a tend vers $-\infty$.

Partie D

⋆ **Calcul de probabilités**

Sur la feuille de papier millimétré de la partie B, on place les points I(1 ; 0), J(0 ; 1) et K(1 ; 1). On utilise cette feuille comme cible.
On admet que, pour chaque essai :

• la probabilité d'atteindre un point du carré OIKJ est égale à $\frac{1}{2}$. ;

• sachant qu'un point du carré est atteint, la probabilité que ce point appartienne à D_0 est égale à A(0).

1. Pour un essai, montrer que la probabilité d'atteindre un point du domaine D_0 est égale à $1 - \frac{2}{\text{e}}$.

2. On effectue n essais (n entier naturel non nul), tous indépendants les uns des autres.

   a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n d'atteindre au moins une fois un point du domaine D_0 au cours de ces n essais.

   b. Déterminer le nombre minimal n d'essais pour que cette probabilité p_n soit supérieure ou égale à 0,99.