Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) est utilisé.
On s'intéresse à cinq questions de ce Q.C.M. supposées indépendantes. À chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 1, 2, 3 et 4, dont une seule est exacte.
Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte ; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq questions » ;
B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq ».

b. On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note - 1 à toute réponse incorrecte.
Calculer la probabilité de l'évènement C : « Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions ».

2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions. Quelle est alors la probabilité de l'événement C décrit au **1. b.** ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à $[0 ; 2\pi[$, le point M d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.

2. Déterminer l'ensemble des points E pour θ appartenant à $[0 ; 2\pi[$.
Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

3. Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$ où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.

4. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?
Démontrer que le nombre $\dfrac{1 + z + z^2}{2}$ est réel, quel que soit θ appartenant à $[0 ; 2\pi[$.
Conclure sur la conjecture précédente.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on donne le point A(12 ; 18). On désigne par B un point de l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$ et par C un point de l'axe $\left(0\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}B},\ \overrightarrow{\mathrm{A}C}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{E})\quad 2x + 3y = 78.$$

2. On se propose de trouver tous les couples $(B,\ C)$ de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Démontrer qu'un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

d. Combien y a-t-il de couples de points $(B,\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leqslant x \leqslant 21 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant 14\ ?$$

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0,72\ ;\ -0,71]$.

3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $-1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $]-1;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}.$$

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition

a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2. Sens de variation de g

a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b. Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.

3. Tableau de variations et représentation graphique de g

a. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

4. Calcul d'aire
Soit a un réel strictement supérieur à 0. On pose :

$$I(a) = \int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Donner, suivant les valeurs de a, une interprétation géométrique du réel $I(a)$.

b. En remarquant que, pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c. Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$ et $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$.