Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 1998

Exercice 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

Un meuble est composé de 10 tiroirs $\mathrm{T}_1,\ \mathrm{T}_2, \dots,\ \mathrm{T}_{10}$.

Une personne place au hasard une boule dans un des tiroirs et une autre est chargée de *trouver le tiroir contenant la boule* à l'aide de la stratégie suivante :

la personne ouvre le tiroir T_1. Si la boule est dans le tiroir T_1, la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2, et ainsi de suite ... en respectant l'ordre des numéros de tiroirs.

On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert.

Pour i entier compris entre 1 et 10 ($1 \leqslant i \leqslant 10$), on appelle B_i l'évènement « La boule se trouve dans le tiroir T_i ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. **a.** Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 ($1 \leqslant i \leqslant 8$), l'évènement $(X = i)$ est l'évènement B_i.

   b. Justifier que l'évènement $(X = 9)$ est la réunion des évènements B_9 et B_{10}.

   c. Déterminer la loi de probabilité de X.

   d. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. **a.** Résoudre l'équation

   $$(\mathrm{E}) \quad : \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.

   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$. Placer P et Q sur la figure.
   Montrer que MNPQ est un carré.
2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].
3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

   a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ et Z' de $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ en fonction de α.

   c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et que $\dfrac{Z}{Z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. **a.** Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

   b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \text{i}$ et $z_2 = \sqrt{3}$ - i et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et de z_2 ; placer M et N sur la figure.

   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que MNPQ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].

3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

   a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{\text{PR}}$ et Z' de $\overrightarrow{\text{PS}}$ en fonction de α.

   c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\dfrac{Z}{Z'} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

⋆ **Étude d'une fonction auxiliaire**

La fonction d est définie sur $]-1\,;\ +\infty[$ par :

$$d(x) = \text{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

1. Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites de d en - 1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) <$ e.

Partie B

⋆ **Étude de la fonction *f***

Dans cette partie on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - \text{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \text{e} + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   Préciser la position relative de (D) et $(\mathscr{C})$.

2. **a.** Pour $x \in]-1\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Vérifier que $f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.

En déduire le sens de variations de f'.

b. Dresser le tableau de variations de f'.

(On admettra que $\lim\limits_{x \to -1} f' = \lim\limits_{x \to +\infty} f' = 1$.)

3. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]-1\,;\,+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.

Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle. Donner une valeur approchée de α au centième près.

4. **a.** Étudier les variations de f.

b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Dresser le tableau de variations de f

Partie C

$\star$ **Prolongement de la fonction *f*** en - 1

On considère la fonction g définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(-1) & = & 0 \\ g(x) & = & f(x) \text{ pour tout } x > -1. \end{array}\right.$$

On appelle $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1. **a.** Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

b. Pour $x \in]-1\,;\,+\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.

c. En déduire que g est dérivable en - 1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.

2. Construire (D) et $(\mathcal{C}')$. Préciser les tangentes à $(\mathcal{C}')$ aux points d'abscisses -1, α, 0.