Durée : 4 heures

Baccalauréat S France juin 1999

Exercice 1 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\dfrac{1}{2}z^2 - z$.

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.

Soit t un réel de $[- \pi\ ;\ \pi]$ et m le point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z = \text{e}^{\text{i}t}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) & = & \dfrac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{array}\right.,\ t \in [-\pi\ ;\ \pi].$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).

2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
   En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0\ ;\ \pi]$.
4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de y sur $[0\ ;\ \pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0\ ;\ \pi]$.
6. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0\ ;\ \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Exercice 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, n est un entier naturel *non nul.*

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\text{e}^{\frac{t}{n}}\,\text{d}t.$$

1. **a.** Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,2]$ par $\varphi(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$.
   Étudier les variations de φ sur $[0\,;\,2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0\,;\,2]$,

$$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}.$$

   b. Montrer que, pour tout réel t dans $[0\,;\,2]$, on a

$$\frac{3}{2}\text{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)\text{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}\text{e}^{\frac{t}{n}}.$$

c. Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2}n\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}-1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}n\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}-1\right).$$

d. On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}\right)=1$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors $3 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{7}{2}$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a : $\dfrac{2t+3}{t+2}=2-\dfrac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a $1 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{n}}$.

En déduire que $\mathrm{I} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{n}}\mathrm{I}$.

c. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n-1,\ b_n=2\times 10^n-1 \text{ et} c_n=2\times 10^n+1.$$

1. **a.** Calculer $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ a_3,\ b_3$ et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que an et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n\times c_n=a_{2n}$.

En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e. Montrer que PGCD $(b_n,\ c_n)$ = PGCD $(c_n,\ 2)$.

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation :

$$(1) \qquad b_3x+c_3y=1$$

d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Problème — 10 points

Commun à tous les candidats

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$: on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A

⋆ Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathscr{C}$

On considère la fonction f, définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}~;~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0~;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $]0~;+\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.
   - **a.** Étudier les variations de u.
   - **b.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2~;~3]$. Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.
   - **c.** Étudier le signe de $u(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.
4. **a.** Étudier les variations de f.
   - **b.** Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α.

     Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

     En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.
5. **a.** Étudier le signe de $f(x)$.
   - **b.** Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B

⋆ Étude d'une primitive de f sur $]0~;+\infty[$.

Soit F la primitive de f sur $[0~;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement aù repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0~;+\infty[$.
   - **b.** Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2. Calcul de $F(x)$.
   - **a.** x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\text{d}t$ (on pourra faire une intégration par parties).
   - **b.** Montrer que, pour tout x strictement positif :

     $$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2.$$
   - **c.** En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. **a.** Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$. En déduire la limite de F en 0.
   - **b.** Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,

     $$F(x) = x\ln x\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3.$$

     En déduire la limite de F en $+\infty$.
   - **c.** Dresser le tableau de variation de F.
   - **d.** Tracer (Γ) sur le même graphique que $(\mathscr{C})$.
4. Calcul d'une aire

   Calculer, en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}^2$.