Baccalauréat S Liban juin 1999

Exercice 1 **4 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité de longueur étant le centimètre, les points A, B, C, D ont pour affixe $3+\text{i}$, $7-i$, $-1-7\text{i}$, $8-4\text{i}$ respectivement.

1. **a.** Placer les points A, B, C, D.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle.
   On précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre I.

3. À tout point M d'affixe z, avec z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{10}{z}$.

   a. Écrire, sous forme algébrique les affixes a', b', c' des points A$'$, B$'$, C$'$ (respectivement associés à A, B, C). Placer les points A$'$, B$'$, C$'$.

   b. Vérifier que : $\dfrac{c'-a'}{b'-a'} = 2$.

   c. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}, \overrightarrow{\text{A}'\text{C}'}\right)$.

   d. Que peut-on en déduire pour les points A$'$, B$'$, C$'$?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Sur une droite (D) muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives -4 et 3. Pour tout entier naturel n, on note

$$A_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\ ;\ 1),\ (B_n\ ;\ 4)\}$$

$$B_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\ ;\ 3),\ (B_n\ ;\ 2)\}$$

1. Placer les points A_0, B_0,A_1, B_1.

2. Les points A_n et B_n ont pour abscisses a_n et b_n respectivement.
   Ainsi, $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$.
   Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$.

   b. En déduire que : $a_{n+1} = -\dfrac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{2}{5}b_n$.

4. **a.** Exprimer a_n et b_n à l'aide de n.

   b. Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.

   c. Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n+3$, $b = 5n+2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. **a.** Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n+3=7k$.
   b. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n+2=7k$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
   Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
   Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Problème **11 points**

Partie I

Soit a et b deux nombres réels. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
   b. Vérifier que, pour tout réel x : $\varphi(x)=-(\varphi''(x)-2\varphi'(x)$.
2. Démontrer que φ admet une primitive Φ, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(x)=(Ax+B)\,\mathrm{e}^{-x}$ où A et B sont des nombres réels que l'on exprimera à l'aide de a et b.
3. Déterminer a et b pour que : $\varphi(0)=5$ et $\varphi'(0)=-3$.
   Donner alors $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\Phi(x)$.

Partie II

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x)=(2x+5)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Donner une interprétation graphique de cette deuxième limite.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère.
3. Calculer $f'(x)$, déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f.
4. Soit I le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.
   Une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point I est $y=g(x)$.
   Déterminer $g(x)$.
5. On pose $d(x)=f(x)-g(x)$.
   a. Étudier le sens de variation de d', calculer $d'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d'.
   b. Étudier le sens de variations de d, calculer $d\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d.
   c. Donner la position de la tangente (T) par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente (T).
7. Soit α un réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{5}{2}$ et $x = \alpha$.
   Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$. (On peut éventuellement utiliser le résultat de la **partie I.**)
   Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.