

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat S Polynésie juin 1999 ⌘

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une blanche ».

- Calculer la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».
 - Calculer la probabilité de l'évènement : « On obtient exactement une boule blanche ».
 - En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}, \quad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}.$$

- Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si,

$$2^{n-1} = n + 1.$$

- Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux par

$$u_n = 2^{n-1} - (n + 1).$$

Calculer u_2 , u_3 , u_4 .

Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

- En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice 2

4 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm.

- Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^3 - 8 = 0$.
- On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_C = -1 - i\sqrt{3}.$$

- Écrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique.
- Placer les points A, B et C.
- Déterminer la nature du triangle ABC.

- On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{2i\frac{\pi}{3}} z.$$

- Caractériser géométriquement l'application f .
- Déterminer les images des points A et C par f .
En déduire l'image de la droite (AC) par f .

Exercice 2

4 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

- Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.
- Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
- Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

- Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p , par 7?
 - Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
 - Étudier le cas où $p = 3n + 2$.
- On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1001001000} \quad b = \overline{1000100010000}.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p .
Sont-ils divisibles par 7?

Problème

11 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x - e^{2x-2}.$$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
On prendra 5 cm comme unité.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - Vérifier que, pour tout réel x non nul : $f(x) = x \left[1 - 2e^{-2} \times \left(\frac{e^{2x}}{2x} \right) \right]$.
- Déterminer f' . Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f .
- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}) .
Étudier la position relative de (\mathcal{C}) et (D).
- On note A le point de la courbe (\mathcal{C}) d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (\mathcal{C}) .
- On note I l'intervalle $[0; 0,5]$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a .
 - Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de a .
- Construire la courbe (\mathcal{C}) , l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B

Détermination d'une valeur approchée de a .

On définit dans \mathbb{R} la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & e^{2u_n-2} \end{cases}$$

1. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{2x-2}$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$.
En déduire $g(a)$.
2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I , on a :

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{e}.$$

3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I , $g(x)$ appartient à I .
4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{2}{e}|u_n - a|$.
5. Démontrer, par récurrence, que : $|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.
6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
7. Déterminer un entier naturel p tel que : $|u_p - a| < 10^{-5}$.
8. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près : on expliquera l'algorithme utilisé sur la calculatrice.