

Durée : 4 heures
∞ Baccalauréat S Polynésie septembre 1998 ∞

Exercice 1

5 points

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2 cm).

À tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z , affixe du point M .

1. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

- b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes z_1^3, z_2^3, z_3^3 des complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3 , de z_2^3 et de z_3^3 .
2. a. Si $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe (avec x, y et θ réels et ρ réel supérieur à zéro), déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et y , puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ .
- b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.
- c. Déterminer et tracer l'ensemble (E') des points M d'affixe z , caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leq z^3 \leq 8$.

Exercice 2

5 points

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous considérons les points A de coordonnées (0 ; 6 ; 0), B de coordonnées (0 ; 0 ; 8), C de coordonnées (4 ; 0 ; 8).

1. a. Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique : 1 cm).
- b. Démontrer que :
- les droites (BC) et (BA) sont orthogonales ;
 - les droites (CO) et (OA) sont orthogonales ;
 - la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).
- c. Déterminer le volume, en cm^3 , du tétraèdre OABC.
- d. Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont vous déterminerez le centre et le rayon.
2. À tout réel k de l'intervalle ouvert $]0 ; 8[$, est associé le point $M(0 ; 0 ; k)$.
Le plan (π) qui contient M et est orthogonal à la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q .
- a. Déterminer la nature du quadrilatère (MNPQ).
- b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ? Pour quelle valeur de k , la droite (MP) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?
- c. Déterminer MP^2 en fonction de k . Pour quelle valeur de k , la distance PM est-elle minimale ?

Problème

10 points

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}.$$

Partie A

Variations de f et tracé de la courbe (F)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}.$$

Dans le plan (P) muni du repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique: 2 cm) la représentation graphique de la fonction f est notée (F).

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.
2.
 - a. Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $[-1 ; +\infty[$, le signe de $x^2 - 2x - 1$ et celui de $f(x)$.
 - b. Déterminer la fonction dérivée f' de f . En déduire le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.
3. Déterminer une équation de la tangente notée (T) la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.
4.
 - a. Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en B(1 ; 0) et C(-1 ; 0).
 - b. Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A, B(1 ; 0) et C(-1 ; 0) et la courbe (F).

Partie B

Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P), où u est un réel donné de l'intervalle $[1 ; +\infty[$ sont définies par :

S est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$,

$S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $1 \leq x \leq u$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

Les aires respectives de ces surfaces sont notées \mathcal{A} , $\mathcal{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_1^x f(t) dt$ où x est un réel positif.
En procédant deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.
2. En déduire la valeur exacte de $\int_1^0 f(t) dt$.
En déduire la valeur exacte de l'aire \mathcal{A} .
3. Déterminer, en fonction de u où $u \geq 1$, l'aire $\mathcal{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathcal{A}_1(u)$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel $\mathcal{A}_1(\alpha) = \mathcal{A}$.
 - a. Démontrer que, sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, l'équation $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}$ est équivalente à : $x = 2 \ln(1 + x)$.
 - b. Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $h(x) = x - 2 \ln(1 + x)$.
Démontrer que, sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, l'équation $x = 2 \ln(1 + x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, notée α , vérifie la condition $2 < \alpha < 3$.

- c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .
Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, que vous pouvez déduire du précédent, d'amplitude 2×10^{-4} .