

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2.
 - a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2 .
 - b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - a. Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport - 3.
 - b. Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 - c. Placer dans le même repère les points A, M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .
 - d. Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.
 - e. Soient I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1 , M_3 , M_5 et M_4 forment un carré.

Exercice 2

4 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à \mathbb{N} :

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans \mathbb{N} .

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ?

Préciser le raisonnement employé.

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Exercice 2

4 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un triangle ABC du plan.

1. a. Déterminer et construire le point G, barycentre de

$$[(A ; 1) ; (B ; -1) ; (C ; 1)].$$

- b. Déterminer et construire le point G', barycentre de

$$[(A ; 1) ; (B ; 5) ; (C ; -2)].$$

2. a. Soit J le milieu de [AB].

Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et en déduire l'intersection des droites (CG') et (AB).

- b. Montrer que le barycentre I de [(B ; 2) ; (C ; -1)] appartient à (GG').

- c. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [GA].

3. Déterminer trois réels
- a
- ,
- d
- et
- c
- tels que K soit barycentre de

$$[(A ; a) ; (D ; d) ; (C ; c)].$$

4. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).

Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de

$$[(A ; a') ; (C ; c')].$$

Problème

11 points

Commun à tous les candidats

Soit la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

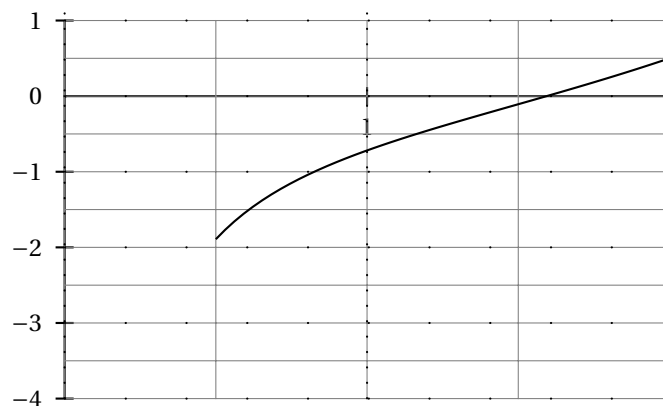
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}.$$

Partie A

Recherche graphique d'un extremum

L'observation de la courbe représentative de la fonction f sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que f admet un minimum sur l'intervalle $[0,5 ; 2]$. On se propose d'en donner une valeur approchée.

Observer ci-dessous la représentation graphique de la fonction f' , dérivée de f sur l'intervalle $[0,5 ; 2]$.



Quels sont les éléments graphiques concernant f' qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de f sur $[0,5; 2]$?

À l'aide de ce graphique, donner un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum.

Partie B

Étude de la fonction F

On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$.

1. Déterminer les variations de h (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).

2. Déterminer le signe de $h\left(\frac{3}{2}\right)$.

En déduire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ tel

que $h(a) = 0$.

En déduire le signe de h sur $[0; +\infty[$.

3. Étude de la fonction f

a. Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. Montrer que, pour tout nombre x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}.$$

En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que $f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$.

Partie C

Recherche d'un encadrement du nombre a

1. Démontrer que, sur $[0; +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ équivaut à

$$2(1 - e^{-x}) = x.$$

2. Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2(1 - e^{-x}).$$

On pose $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

3. Soit la suite $(x_n)_{n>1}$ définie par

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{3}{2} \\ x_{n+1} &= g(x_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, x_n appartient à I .

4. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|x_n - a|$$

$$\text{et } |x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}.$$

En déduire que la suite (x_n) converge vers a .

5. Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel a . Donner une valeur approchée de x_p avec trois décimales.

Partie D**Quelques propriétés d'une primitive de f**

On appelle F la primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1. Ainsi l'on a, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

1. Étudier le sens de variation de F sur $]0 ; +\infty[$.
2. Démontrer que, pour tout x supérieur ou égal à 2,

$$\int_2^x f(2) dt \leq \int_2^x f(t) dt.$$

Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.