

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1999

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. a. Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

- b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.

À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0 , l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément n de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les n premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4 , l'imprimante fonctionne correctement.

L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 . On admet que, pour chaque élément n de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, $P(E_n) = 32 \times 10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

- a. Calculer la probabilité $P(E_4)$. Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

- b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P(C/E_0)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé?
En déduire la probabilité $P(C \cap E_0)$.

- c. Déterminer de même $P(C/E_n)$ puis $P(C \cap E_n)$ pour tout élément n de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. En déduire $P(C)$.

- d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit?

EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, dx.$$

1. a. Calculer I_0 .

- b. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1 .

2. a. En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n .

- b. Vérifier que $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.
3. Sans calculer l'intégrale I_n ,
- montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone ;
 - pour tout nombre n entier naturel non nul, comparer I_n à $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$.
 - déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

On considère l'équation

$$(1) \quad : \quad 20b - 9c = 2.$$

où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble \mathbb{Z} des nombres entiers relatifs.

- Montrer que si le couple $(b_0 ; c_0)$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.
 - On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
- Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.
- Déterminer l'ensemble des solutions $(b ; c)$ de (1) telles que $\text{p.g.c.d.}(b ; c) = 2$.
- Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P , déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \dots + \alpha_1 r + \alpha_0$, où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r, 0 \leq \alpha_{n-1} < r, \dots, 0 \leq \alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).
Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a , puis de b et de c .
Donner l'écriture de P dans le système décimal.

PROBLÈME

11 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1 + \ln x}{x}.$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.

- On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x.$$

- a. Étudier le sens de variations de φ .
- b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique qu'on appellera α . Trouver le nombre entier naturel p tel que :

$$p \times 10^{-2} \leq \alpha < (p+1) \times 10^{-2}.$$

- c. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x .

2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative \mathcal{C} ?

- c. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

- d. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + x.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Préciser les positions relatives des courbes \mathcal{C} et Γ .

- e. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0,2	0,4	2	2,5
$f(x)$									

Les valeurs de $f(x)$ seront données à 10^{-2} près.

- f. Tracer \mathcal{C} et Γ .

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Unité graphique : 4 cm. À tout point M d'affixe non nulle z , on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = z^2 + z + z - \frac{1 + \ln|z|}{z}.$$

On dit que M' est l'image de M .

- On considère les points P et Q d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et i .
Calculer les affixes des images P' et Q' de ces points. Placer P, Q, P' et Q' .
- Δ est la demi-droite constituée des points d'affixe réelle strictement positive. Soit M un point de Δ , d'affixe x . Quelle est l'affixe de son image M' ?
 - En utilisant le tableau des variations de la fonction f , indiquer la valeur de x pour laquelle l'abscisse de M' est minimum.
 - Définir et représenter l'ensemble Δ' des points M' lorsque M décrit la demi-droite Δ .

3. Le point M décrit maintenant le cercle E de centre O et de rayon 1.

On note θ un argument de z , θ décrivant $[-\pi ; \pi]$.

a. Montrer qu'une représentation paramétrique de l'ensemble E' des points M est :

$$\begin{cases} x(\theta) &= \cos 2\theta \\ y(\theta) &= \sin 2\theta + 2 \sin \theta \end{cases}$$

b. Que peut-on dire des points E' de paramètres respectifs θ et $-\theta$?

En déduire qu'il suffit de construire la partie E' correspondant à l'ensemble $[0 ; \pi]$ des valeurs de θ (partie qu'on désignera par E'_1 pour obtenir E').

c. Étudier conjointement les variations sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ des fonctions x et y .

d. Préciser les points d'intersection de E'_1 avec chacun des axes de coordonnées.

e. Déterminer les points où E'_1 admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées. On admet qu'au point correspondant à la valeur π du paramètre, E'_1 admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

f. Tracer E' en utilisant avec précision les éléments obtenus précédemment.