Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 1999

EXERCICE 1 **4,5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit x un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 10$. On place maintenant x boules blanches et $10 - x$ boules noires dans l'urne A et les $10 - x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B. On procède à l'expérience E :
On tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.
On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

a. Pour cette question **a.**, on prend $x = 6$.
Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à :

$$\frac{1}{55}\left(-x^2 + 10x + 5\right).$$

c. Pour quelles valeurs de x l'évènement M est-il plus probable que l'évènement contraire $\overline{\text{M}}$?

EXERCICE 2 **5,5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Pour tout point P, on convient de noter z_P son affixe.

1. On considère dans l'ensemble des complexes l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$.

a. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que $z^3 + 8 = (z+2)(az^2 + bz + c)$ pour tout complexe z.

b. Résoudre l'équation (E) (on donnera les solutions sous la forme $x + y\text{i}$, avec x et y réels).

c. Écrire ces solutions sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un réel positif.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives - 2, 1 - i$\sqrt{3}$ et 1 + i$\sqrt{3}$, le point D milieu de [OB] et la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   a. Montrer que R(A) = B, R(B) = C et R(C) = A. En déduire que le triangle ABC est équilatèral.
   Placer A, B, C, D dans le plan.

   b. On considère le point L défini par $\overrightarrow{\text{AL}} = \overrightarrow{\text{OD}}$. Déterminer son affixe z_{L}.
   Déterminer un argument de $\dfrac{z_{\text{L}}}{z_{\text{D}}}$.
   En déduire que le vecteur $\overrightarrow{\text{OL}}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{OD}}$ et au vecteur $\overrightarrow{\text{AL}}$.
   Montrer que L est sur le cercle de diamètre [AO].
   Placer L sur la figure.

EXERCICE 2 **5,5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On donne le point A(6 ; 0) et le point A$'$(0 ; 2).
À tout point M de l'axe des abscisses différent de A on associe le point M' tel que :

$$\text{A}M = \text{A}'M' \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{A}'M'}\right) = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi.$$

On admet l'existence et l'unicité de M'.
On réalisera une figure avec, pour unité graphique 0,5 cm et pour cette figure, on prendra -4 pour abscisse de M.

1. Soit M un point de l'axe des abscisses différent de A.

   a. Placer le point M' sur la figure.

   b. Pour cette question on pourra donner une démonstration purement géométrique ou utiliser les nombres complexes.
   Démontrer qu'il existe une unique rotation, dont on précisera le centre, noté I et l'angle, qui transforme A en A$'$ et M en M'.
   Placer I sur la figure.

   c. Démontrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par I.

2. On veut déterminer et construire les couples de points $(M,\ M')$ vérifiant la condition supplémentaire $MM' = 20$.

   a. Calculer IM et démontrer qu'il existe deux couples solutions : $(M_1,\ M'_1)$ et $(M_2,\ M'_2)$.

   b. Placer ces quatre points sur la figure.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Étude d'une fonction et résolution d'une équation liée à cette fonction.

Dans tout le problème, on considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 4 cm).

Partie A

Étude du sens de variation de la fonction f

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $]\ 0\ ;\ +\ \infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $]\ 0\ ;\ +\ \infty[$.

   b. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

2. Montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $\mathrm{I} = [0{,}7\ ;\ 0{,}9]$, $f(x)$ est aussi élément de I et que $|f'(x)| \leqslant 0{,}9$.

Partie B

On se propose dans cette partie de montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et de donner une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une suite.

1. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\ \infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x.$$

   a. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en 0.

   b. Montrer que g est une fonction strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on notera α, appartenant à l'intervalle $\mathrm{I} = [0{,}7\ ;\ 0{,}9]$. Montrer que cette équation n'a pas d'autre solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.

   d. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x) = x$? Sur le graphique joint en annexe, que l'on rendra avec la copie, figure la partie de la courbe $\mathscr{C}$ dont les points ont une abscisse comprise entre 0,7 et 0,9 et le segment [AB], où A et B sont les points de coordonnées respectives (0,7 ; 0,7) et (0,9 ; 0,9). Que représente le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ pour la courbe $\mathscr{C}$ et le segment [AB] ? Placer ce point sur le graphique joint en annexe.

2. On considère la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = 0{,}7$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, a_n est élément de I.

b. Construire sur le graphique joint en annexe les éléments de (a_n) pour $n = 1, 2, 3, 4$.
Justifier que la suite n'est pas monotone.

c. Démontrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que

$$|a_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,9\,|a_n - \alpha| \text{ pour tout entier } n.$$

d. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que

$$|a_n - \alpha| \leqslant (0,9)^n \times 0,2 \text{ pour tout entier } n.$$

En déduire que la suite (a_n) converge vers α.

3. **a.** Montrer que si $x < \alpha$ alors $f(x) > \alpha$ et que si $x > \alpha$ alors $f(x) < \alpha$. On admet que, pour tout entier naturel n pair, $a_n < \alpha$ et que pour tout entier naturel n impair, $a_n > \alpha$.

b. Le tableau de valeurs suivant a été écrit par un élève ayant recopié les résultats donnés par un logiciel informatique pour le calcul des valeurs approchées des termes de la suite (a_n), en ne retenant que les 5 premières décimales. Or, une valeur a été incorrectement recopiée.
Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle on est sûr que la valeur approchée écrite de a_n est incorrecte ?
Pourquoi ? Soit p cette valeur. Calculer à la calculatrice une valeur approchée de a_p et vérifier la valeur approchée de a_{p+1} écrit dans le tableau.
Peut-on affirmer à l'aide de ce tableau que $0,806\,40 < \alpha < 0,806\,51$?

$n =$	a_n	$n =$	a_n
0	0,700 00	12	0,805 23
1	0,887 30	13	0,807 31
2	0,754 71	14	0,805 88
3	0,843 71	15	0,806 86
4	0,781 72	16	0,806 19
5	0,823 83	17	0,806 65
6	0,794 72	18	0,806 33
7	0,814 61	19	0,806 55
8	0,800 91	20	0,806 40
9	0,810 29	21	0,806 50
10	0,808 84	22	0,806 43
11	0,808 26		

Annexe 1

Partie de la courbe $\mathscr{C}$ dont les points ont une abscisse comprise entre 0,69 et 0,91 et le segment [AB], où A et B sont les points de coordonnées respectives (0,7 ; 0,7) et (0,9 ; 0,9).