

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la pro-

babilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :
 A_n : « Alice atteint la cible au n^{e} coup ».

B_n : « Alice rate la cible au n^{e} coup ».

On pose $P_n = p(A_n)$.

Pour les questions 1. et 2. on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{15}.$$

3. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q .

4. Écrire u_n puis p_n en fonction de n .

5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -i; z_B = 3; z_C = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_D = -1 + 2i.$$

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.

2. a. Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

b. Calculer le complexe $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?

3. a. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

b. Calculer l'aire s_0 du quadrilatère ABCD.

4. a. Placer sur la figure précédente les points A_1, B_1, C_1 et D_1 tels que $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1C_1}$, où les points A_1 et B_1 appartiennent à $[DC]$, le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ étant un carré situé à l'extérieur du quadrilatère $ABCD$.
- b. Tracer le carré $A_1B_1C_1D_1$ et déterminer son aire s_1 .
5. a. On continue par le même procédé : un carré $A_nB_nC_nD_n$ étant déterminé, on considère les points $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{D_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}} = \overrightarrow{B_{n+1}C_{n+1}}$ où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[D_nC_n]$, le quadrilatère $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $A_nB_nC_nD_n$.
Tracer le carré $A_2B_2C_2D_2$.
- b. Soit s_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$.
Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n , puis de n .
En déduire s_n , en fonction de n .
- c. Déterminer, en fonction de n , l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère $ABCD$ et des carrés $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, \dots$ et $A_nB_nC_nD_n$.
- d. La suite (s_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Déterminer $\text{PGCD}(2688 ; 3024)$.
2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.
- a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes
(1) $2688x + 3024y = -3360$;
(2) $8x + 9y = -10$.
- b. Vérifier que $(1 ; -2)$ est une solution particulière de l'équation (2).
- c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).
3. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives
- $$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$
- a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
- b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).
- c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Problème

11 points

Partie A

Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de (\mathcal{C}) .
2. Étudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ une solution unique, notée α .
Déterminer un encadrement de α , d'amplitude 10^{-2} .
Donner, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.
4. Tracer la courbe (\mathcal{C}) .

Partie B

Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1.
2.
 - a. Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par :

$$\varphi(x) = x - x^2 + \ln x.$$
 Calculer $\varphi'(x)$.
En déduire le sens de variation de φ , puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$.
 - c. En déduire la position relative de (\mathcal{C}) et de (D) .
3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe (\mathcal{C}) et la tangente (D) .
 - a. Hachurer ce domaine.
 - b. Soit \mathcal{A} son aire, en cm^2 . Écrire la valeur exacte de \mathcal{A} comme expression polynomiale du second degré en α .

Partie C

Étude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{e}; \alpha\right]$. On note M_0 le point de (\mathcal{C}) d'abscisse x_0 .

1. a. Donner une équation de la tangente (T_0) à (\mathcal{C}) en M_0 , en fonction de x_0 , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
- b. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses. Écrire x_1 en fonction de x_0 , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2. On considère la fonction h définie sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right[$ par :

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \text{ (On remarquera que } h(x_0) = x_1 \text{).}$$

a. Montrer que $h'(x) = \frac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$.

b. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right[$.

c. En déduire que h est strictement croissante sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right[$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d. En écrivant $h(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right[$

En déduire que $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right[$, $h(x)$ appartient à $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right[$

- b. On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n .
Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.