∽ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2000 ∾

Exercice 1 **5 points**

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.
Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

   a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »
   E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

   b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.
   Établir la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
   On effectue ainsi k tirages successifs.
   Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$d'unité 1 km. Le plan $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$représente le sol.
Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(D_1)\left\{\begin{array}{l c l}x&=&3+a\\y&=&9+3a\\z&=&2\end{array}\right. \quad \text{avec} \quad a\in\mathbb{R} \quad (D_2)\left\{\begin{array}{l c l}x&=&0,5+2b\\y&=&4+b\\z&=&4-b\end{array}\right. \quad \text{avec} \quad b\in\mathbb{R}.$$

1. **a.** Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ directeur de la droite (D_2).

   b. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées S(3 ; 4 ; 0,1) , un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R) . Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2).

   a. Montrer que (D_2) est sécante à (P_1) .

b. Montrer que (D_1) est sécante à (P_2).

c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2). Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que

$\text{AB} = \text{BC} = \text{CD} = \text{DA} = 5$ et $(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] , [DA] et [BD].

On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(\text{A}) = \text{B}$, $f(\text{B}) = \text{O}$, $f(\text{D}) = \text{C}$.

a. Prouver que f est un antidéplacement.

b. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D.

c. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

a. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.

b. A-t-on $f = \sigma \circ r$?

3. Soit s_1, la symétrie orthogonale d'axe (BC).

a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2, telle que $r = s_2 \circ s_1$.

b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, , où t_1 est une translation que l'on précisera.

4. Soit t_2 la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AD}}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.

a. Déterminer $g(\text{D})$, $g(\text{I})$, $g(\text{O})$. En déduire la nature précise de la transformation g.

b. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

Problème **10 points**

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

, puis la recherche de primitives de cette fonction.

Partie A - Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1).$$

   a. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

   b. Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

   c. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l' intervalle $]1~;~+\infty[$.

   d. Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

   e. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[\mathrm{e}+1~;~\mathrm{e}^3+1]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1~;~\alpha[$ et $]\alpha~;~+\infty[$.
2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$

   a. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

   b. Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

   c. Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1~;~\sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}~;~+\infty[$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a

$$f(x) = \varphi(\mathrm{e}^x).$$

2. En déduire :

   a. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

   b. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   c. Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) \leqslant \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

4. Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	$0,1$	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$f(x)$						

5. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée, On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Partie C - Recherche de primitives de f

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

2. On pose $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

a. Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.