

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2 , associe

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}.$$

1. Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y .

On vérifiera que $\Re(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$.

En déduire la nature de :

- a. l'ensemble E des points M d'affixe z , tels que Z soit un réel ;
- b. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
- c. Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.

En remarquant que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3. Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- 4 jetons blancs marqués 0 ;
- 3 jetons rouges marqués 7 ;
- 2 jetons blancs marqués 2 ;
- 1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les événements suivants :
 - A : « Les quatre numéros sont identiques ».
 - B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
 - C : « Tous les jetons sont blancs ».
 - D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».
 - E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

- a. Montrer que la probabilité de l'évènement B , est $\frac{4}{105}$.
- b. Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E .
- c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B .
On établit la règle de jeu suivante :
- Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F
- Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F
- Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F
- Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F
Pour tous les autres tirages, il perd 5 F
 G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b .
- a. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution $(x_0 ; y_0)$. Montrer que d divise 60.
- b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0 ; y_0)$ à l'équation (1).
2. On considère l'équation : (2) $24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).
- a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).
- b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples $(x ; y)$ solutions.
- c. Énumérer tous les couples $(x ; y)$ solutions de (2) et tels que :
$$-10 \leq x \leq 10.$$

Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.
- d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que :
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
- e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x ; y)$ de l'équation (2) appartiennent à E .
Comment peut-on caractériser S ?

Partie A

On considère la fonction numérique f , de la variable réelle x , définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x.$$

On appelle (\mathcal{C}_f) la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, et 6 cm pour π unités sur l'axe des abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel x , $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et l'existence d'une asymptote pour la courbe (\mathcal{C}_f) .
2. Montrer que la fonction dérivée de f vérifie :
 $f'(x) = -\sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, pour x élément de \mathbb{R} .
3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
Recopier et compléter le tableau suivant :

| | |
|---|------------------------|
| x | $-\frac{\pi}{2}$ π |
| $x + \frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| Signe de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | |

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ainsi que les courbes (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) d'équations $y = -e^{-x}$ et $y = e^{-x}$.
5. Déterminer algébriquement sur \mathbb{R} , puis sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, les coordonnées des points communs à :
 - a. (\mathcal{C}_f) et l'axe des abscisses.
 - b. (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_1) .
 - c. (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_2) .
6. Déterminer un réel α tel que, pour $x \geq \alpha$, on ait $|f(x)| \leq 10^{-2}$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} .

1. En calculant les dérivées successives de la fonction f jusqu'à l'ordre 4 (on rappelle que $f(x) = e^{-x} \sin x$), trouver une relation entre la fonction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.

2. En déduire qu'on peut choisir $F(x) = -\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$.
3. On pose $I = \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx$. Montrer que $I = \frac{e+1}{2}$.

Partie C

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) \, dx$.

1. Vérifier que $I_0 = I$ et interpréter I_0 comme l'aire d'un domaine plan. Hachurer ce domaine.
2. Montrer que, pour tout naturel n , $I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2}(e^{-\pi} + 1)$.
3. Prouver que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Calculer sa raison.
4. Prouver que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.