# Baccalauréat S Pondichéry juin 2000

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro $x$ la clef utilisée au $x$-ième essai.

**1.** On appelle $D_1$ l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

**2.** On appelle $D_2$ l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement $D_2$ se réalise, sachant que l'évènement $D_1$ est réalisé.
En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$.
On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

**3.** Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

**4.** Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i\ ;\ j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros $i$ et $j$ », et $P(i\ ;\ j)$ la probabilité de cet événement.

**a.** Calculer $P(2\ ;\ 4)$.

**b.** Calculer $P(4\ ;\ 5)$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni dun repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ; unité graphique 4 cm.
On appelle B le point d'affixe i et $M_1$ le point d'affixe :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\text{i}).$$

**1.** Déterminer le module et un argument de $z_1$.

**2.** Soit $M_2$ le point d'affixe $z_2$, image de $M_1$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer le module et un argument de $z_2$.
Montrer que le point $M_2$ est un point de la droite $(D)$ d'équation $y = x$.

**3.** Soit $M_3$ le point d'affixe $z_3$, image de $M_2$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$.

**a.** Montrer que $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.

**b.** Montrer que les points $M_1$ et $M_3$ sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

4. Construire, à la règle et au compas, les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$ en utilisant les questions précédentes ; on précisera les différentes étapes de la construction.

5. À tout point $M$ du plan d'affixe $z$ (distinct de B), on associe le point $M'$, d'affixe $Z$ telle que $Z = \dfrac{1}{\text{i} - z}$.
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M$ du plan ($M$ distinct de B) tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2 5 points

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul.

1. **a.** Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de $3n$ par 7.

   **b.** Démontrer que, pour tout $n$, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que $3^n$ et $3^{n+6}$ ont le même reste dans la division par 7.

   **c.** À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.

   **d.** De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de $3^n$ par 7, pour $n$ quelconque?

   **e.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$,$3^n$ est premier avec 7.

2. Soit $U_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   **a.** Montrer que si $U^n$ est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

   **b.** Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors $U_n$ est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de $n$ telles que $U_n$ soit divisible par 7.

## PROBLÈME **11 points**

### Partie A

⋆ Étude de la fonction $g\ :\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

Soit la fonction $g$ définie sur ]- 3 ; 3[ par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction $g$.

2. **a.** Calculer les limites de $g$ en $-3$ et en 3.

   **b.** Étudier le sens de variation de $g$ sur [0 ; 3 [.
   Dresser son tableau de variation sur ] $-3$ ; 3[.

**3.** soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal d'unité graphique 4 centimètres. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans ce repère.

**a.** Déterminer une équation de la tangente $(T)$ à $(\mathscr{C})$ au point dabscisse 0.

**b.** Tracer dans le repère la courbe $(\mathscr{C})$ et sa tangente $(T)$.

**4.** Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**5.** **a.** Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto xg(x)$.

**b.** Calculer l'aire, exprimée en cm$^2$, de la portion de plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites déquations $x = 0$ et $x = 1$. On donnera la valeur exacte de cette aire, puis une valeur approchée au mm$^2$ près.

**Partie B**

⋆ Étude d'une courbe paramétrée

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 centimètres.

Soit la courbe paramétrée $(\Gamma)$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t\left(3-t^2\right) \\ y(t) & = & tg(t) \end{array}\right. \quad \text{pour} \quad t \in [-2\,;\,2].$$

où $g$ désigne la fonction étudiée dans la partie A. On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)\,;\,y(t)$.

**1.** **a.** Comparer d'une part $x(t)$ et $x(-\,t)$ et d'autre par $y(t)$ et $y(-\,t)$.

**b.** Par quelle transformation peut-on passer de $M(t)$ à $M(-t)$ ?
En déduire que $(\Gamma)$ admet un axe de symétrie que l'on précisera.

**2.** Étudier la fonction $x\ :\ t \longmapsto t(3-t^2)$ et dresser son tableau de variation sur $[0\,;\,2]$.

**3.** En utilisant la partie **A.**, montrer que la fonction $t \longmapsto y(t)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

**4.** Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $[0\,;2]$.

**5.** Pour quelles valeurs de $t$ l'abscisse de M(t) est-elle nulle ?
Préciser alors les ordonnées des points correspondants de $(\Gamma)$.

**6.** Tracé de $(\Gamma)$

**a.** Placer, dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les points M(0), M(1), M$\left(\sqrt{3}\right)$ et M(2) qui correspondent respectivement aux valeurs 0, 1, $\sqrt{3}$ et 2 du paramètre $t$.

**b.** Préciser un vecteur directeur des tangentes à $(\Gamma)$ aux points M(0) et M(1) et tracer ces tangentes.

**c.** Tracer $(\Gamma)$.