

# Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau septembre 1999

## EXERCICE 1

4 points

### Enseignement obligatoire et de spécialité

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires.

On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

- Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore.
- Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches?
  - Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est  $\frac{68}{165}$ .
- Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement tricolore.
- Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore?

## EXERCICE 2

5 points

### Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $z^3$  soit un nombre réel positif ou nul.

- Le point A d'affixe  $a = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  appartient-il à E?
  - On note B le point d'affixe  $b = -1 + i\sqrt{3}$ .  
Calculer un argument de  $b$  et montrer que B appartient à E.
- On suppose  $z \neq 0$  et on note  $\theta$  un argument de  $z$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\theta$  pour que  $z^3$  soit un nombre réel positif.
- Après avoir vérifié que le point O appartient à E, déduire des résultats précédents que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Placer les points A et B et représenter E sur une figure.
- À tout point P d'affixe  $z \neq 0$ , on associe les points Q d'affixe  $iz$  et R d'affixe  $z^4$ . On note F l'ensemble des points P tels que l'angle  $(\vec{OQ}, \vec{OR})$  ait pour mesure  $\frac{\pi}{2}$ .  
Montrer que F est l'ensemble E privé du point O.

## EXERCICE 2

5 points

### Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . (unité graphique : 1 cm).

- On note A, B et C les points d'affixes respectives  $2i$ ,  $-1 + 4i$  et  $5 + 2i$ .  
On considère la translation  $t$  de vecteur  $\overrightarrow{BC}$ , la symétrie  $S$  d'axe (AB) et la transformation  $f = t \circ S$ .  
On désigne par  $A'$  et  $B'$  les images respectives de A et B par  $f$ . Calculer les affixes de  $A'$  et  $B'$  et placer les points A, B, C,  $A'$  et  $B'$  sur une figure.
- On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme  $z' = a\bar{z} + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes et  $|a| = 1$ .  
À tout point  $M$  d'affixe  $z$ ,  $f$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ .  
Justifier que  $f$  est un antidéplacement et démontrer que :

$$z' = \frac{-3 - 4i}{5}\bar{z} + \frac{38 - 6i}{5}.$$

- Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$ . La transformation  $f$  est-elle une symétrie?
- On appelle D le point d'affixe  $3 + 6i$ ,  $\Delta$  la médiatrice de [BD] et  $S'$  la symétrie d'axe  $\Delta$ .
  - Montrer que les droites  $\Delta$  et (AB) sont parallèles. Déterminer  $S \circ S'$ .
  - Montrer que  $f \circ S'$  est la translation, notée  $t'$ , de vecteur  $\overrightarrow{DC}$ . En déduire que  $f = t' \circ S'$ .

**PROBLÈME****11 points****Commun à tous les candidats**

Ce problème comporte trois parties **A**, **B** et **C**. Les parties **B** et **C** sont indépendantes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique : 4 cm).

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

On note  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

- Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  puis la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Étudier le sens de variation de  $f$ .
- Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$ .  
En déduire que la courbe  $\Gamma$  admet, en  $-\infty$ , une asymptote, notée  $(\Delta)$ .
- Tracer  $(\Delta)$  et  $\Gamma$ .

**Partie B**

- Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$ .

2. On note A, B et C les points de  $\Gamma$  d'abscisses respectives 0, 1 et - 1.  
On appelle  $T_0$ ,  $T_1$  et  $T_{-1}$  les tangentes respectives à la courbe  $\Gamma$  aux points A, B et C.

- a. Démontrer que la droite (BC) est parallèle à la droite  $T_0$ .  
b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de  $T_1$  et  $T_{-1}$ .

### Partie C

1. Soient  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  par :

$$u(t) = \ln(1+t) - t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2.$$

Étudier les variations de  $u$  et  $v$ . En déduire que, pour tout nombre réel  $t$  positif, on a :

$$t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t.$$

2. Soit  $n$  un entier naturel ( $n \geq 1$ ). On considère le nombre  $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ .

- a. Démontrer que :

$$\frac{1-e^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leq S_n \leq \frac{1-e^{-n}}{e-1}.$$

- b. On admet que la suite  $(S_n)$  a une limite réelle L.

Montrer que  $\left| L - \frac{1}{e-1} \right| \leq \frac{1}{2(e^2-1)}$ .