

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

L'espace  $E$  est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les trois points  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(1; 1; 0)$  et  $C(3; 2; 6)$ .  $(D)$  est la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(0; 1; 1)$  et  $(\Delta)$  la droite passant par  $C$  et de vecteur directeur  $\vec{v}(1; -2; 2)$ .

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites  $(D)$  et  $(\Delta)$  puis montrer que  $(D)$  et  $(\Delta)$  sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.
2. Calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  (question hors programme en 2002), puis écrire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
3. Soit  $H$  le projeté orthogonal du point  $F(2; 4; 4)$  sur le plan  $(ABC)$ .
  - a. Expliquer pourquoi il existe un réel  $k$  non nul tel que  $\overrightarrow{FH} = k\vec{w}$ .
  - b. Déterminer la valeur de  $k$  et en déduire les coordonnées de  $H$ .
  - c. Calculer le volume du tétraèdre  $FABC$ .

**Exercice 2**

**4 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère le polynôme  $P$  défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Calculer  $P(i\sqrt{3})$  et  $P(-i\sqrt{3})$  puis montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on ait  $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives  $z_A = i\sqrt{3}$ ,  $z_B = -i\sqrt{3}$ ,  $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$  et  $z_D = \overline{z_C}$ , puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4. On note  $E$  le symétrique de  $D$  par rapport à  $O$ . Montrer que  $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$  puis déterminer la nature du triangle  $BEC$ .

**EXERCICE 2**

**4 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. Montrer que, pour tout entier relatif  $n$ , les entiers  $14n + 3$  et  $5n + 1$  sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) :  $87x + 31y = 2$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
- Vérifier, en utilisant par exemple la question 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple  $(u ; v)$  d'entiers relatifs tel que  $87u + 31v = 1$  puis une solution  $(x_0 ; y_0)$  de (E).
  - Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans  $\mathbb{Z}^2$ .
  - Application* : Déterminer les points de la droite d'équation  $87x - 31y - 2 = 0$  dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.  
*Indication* : On remarquera que le point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple  $(x ; y)$  vérifie l'équation (E).

**PROBLÈME****12 points**

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2},$$

de déterminer ensuite dans la partie B, la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie C., cette dernière partie étant, dans une large mesure, indépendante des deux autres.

**Partie A**

1. Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1.$$

- a. Montrer que la fonction  $g$  est dérivable et que, pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}.$$

- b. Étudier les variations de la fonction  $g$  puis déterminer le signe de  $g(x)$ .

2. a. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

- b. Montrer que, pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  puis donner le tableau de variation de  $f$ .

**Partie B**

( $\Gamma$ ) désigne la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 2 cm.

1. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $h(x) = x + \ln x$ .

- a. Étudier le sens de variation de  $h$ , puis montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0,4 ; 0,7]$ .

- b. Montrer que l'on a :  $e^{-\alpha} = \alpha$ .

2. **a.** Vérifier que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $(\Gamma)$  en  $+\infty$ .
- b.** Utiliser les résultats de la question 1) **a)** pour déterminer les positions relatives de  $(\Gamma)$  et  $(\Delta)$ .
3. Construire  $(\Gamma)$  et  $(\Delta)$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
4. **a.** Calculer, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I

$$I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt.$$

- b.** En déduire l'aire, en  $\text{cm}^2$ , de la portion de plan limitée par la courbe  $(\Gamma)$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$ .

### Partie C

#### Étude d'une suite (hors-programme en 2002)

Dans cette partie :

- \* I désigne l'intervalle  $[0,4; 0,7]$  ;
- \*  $\alpha$  est le réel mis en évidence au **B. 1.** ;
- \*  $\varphi$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = e^{-x}$  ;
- \*  $u$  est la suite récurrente définie par  $\begin{cases} u_0 &= 0,4 \\ u_{n+1} &= \varphi(u_n) \end{cases}$

1. Montrer qu'on a, pour tout  $x \in I$ .
- a.**  $\varphi(x) \in I$ .
- b.**  $|\varphi'(x)| \leq 0,7$ .
- c.**  $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$ .
2. **a.** Montrer qu'on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$ , puis en déduire par récurrence qu'on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - \alpha| \leq 0,3 \times (0,7)^n.$$

- b.** Conclure alors quant à la convergence de la suite  $u$ .
3. Déterminer un entier  $p$  tel que, pour  $n \geq p$ , on ait  $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ , puis donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de  $u_p$  à  $10^{-3}$  près.