

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.

On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.

Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

À chaque tirage de **deux boules**, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , le point M de coordonnées $(x; y)$.

On désigne par D le disque de centre O et de rayon $1,7$.

Les résultats seront donnés sous forme de **fraction irréductible**.

1. Placer dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A « Le point M est sur l'axe des abscisses » ;
B « Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3. **a.** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X . Calculer son espérance mathématique $E(X)$.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le point M appartient au disque D » est égale à $\frac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.
 Quelle est la probabilité de l'évènement suivant :
C : « Au moins un de ces points appartient au disque D » ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.
 Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,9999.

EXERCICE 2

5 points

Candidats qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

- b.** Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $iz - 2 = 4i - z$. On donnera la solution sous forme algébrique.
- 2.** On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, $2i$ et $3 + i$.
- a.** Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
- b.** Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.
- c.** Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
En déduire le module et un argument de ce nombre. (z_A et z_B désignent les affixes des points A et B).
- d.** Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$.
Montrer que ABCD est un carré.
- 3.** Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
- a.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur \overrightarrow{MI} .
- b.** Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].
- c.** Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{AB} \right\|.$$

Construire Γ .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2cm). On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m + i)z + m - 1 - i$$

Partie A

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?
2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Partie B

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

1. **a.** Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_m .

b. Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\frac{z' - 1}{z - 1}$.

En interprétant géométriquement le module et un argument de $\frac{z' - 1}{z - 1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

c. Démontrer que, pour tout nombre z on a : $z' - z = i(z - 1)$. En déduire que si M est distinct de Ω , alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M .

2. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant :

$$M_0 = O, M_1 = T_1(M_0), \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } M_n = T_1(M_{n-1}).$$

a. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

b. Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

PROBLÈME

11 points

Partie A Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par Δ la droite d'équation $y = x + 1$ et par Γ la courbe d'équation $y = e^x$.

a. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?

b. Tracer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite Δ et donner l'allure de Γ .

2. a. Démontrer que pour tout réel t , $e^t \geq t + 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. En déduire que pour tout réel t , $e^{-t} + t + 1 \geq 2$, et que pour tout x de \mathbb{R}_+^* on a : $\frac{1}{x} + \ln x + 1 \geq 2$.

Partie B Étude d'une fonction.

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = (x + 1) \ln x.$$

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2 cm).

1. a. Étudier le sens de variations de g en utilisant la **partie A**.

b. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

2. a. Déterminer une équation de la tangente D à \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

b. On appelle h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = g(x) - 2x + 2$.

Étudier le sens de variations de h . On pourra utiliser la question **A.2.b.**

En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

- c. Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à D .
3. Tracer \mathcal{C} et D dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v})
4. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $U_n = \int_n^{n+1} g(x) dx$.
- a. Donner une interprétation géométrique de U_n .
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul on a :
- $$g(n) \leq U_n \leq g(n+1).$$
- c. En déduire le sens de variation de la suite (U_n) .
- d. La suite (U_n) est-elle convergente ?

Partie C Étude d'une primitive.

G désigne la primitive de g sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

On a donc : pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $G(x) = \int_1^x g(t) dt$.

1. Quel est le signe de $G(x)$ suivant les valeurs de x ?
2. Calculer $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déterminer les limites de G en 0 et en $+\infty$.
 Pour l'étude en $+\infty$, on pourra mettre x en facteur dans l'expression $G(x)$.
 Pour l'étude en 0, on admettra que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.