

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Pour tout nombre complexe z , on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

a. Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(ib)$. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

b. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β , que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z ,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

2. Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal.

a. Placer dans le plan \mathcal{P} les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3i$, $b = -3i$, $c = 5 + 2i$ et $d = 5 - 2i$.

b. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

c. Déterminer l'ensemble E des points M de \mathcal{P} tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 10.$$

Tracer E sur la figure précédente.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

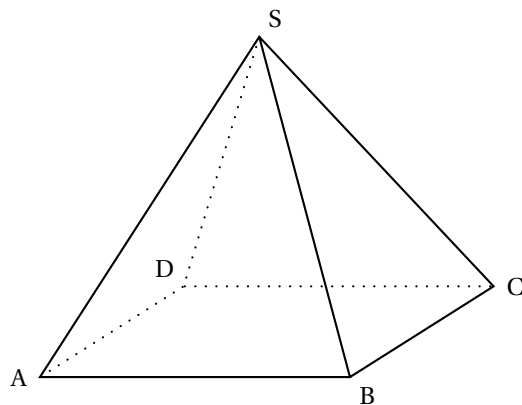
a. La fourmi se trouve en A. Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- en A?
- en B?
- en C?
- en D?

b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note : S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet évènement. Donner p_1 .

En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n).$$



2. On considère la suite (p_n) , définie pour tout nombre entier n strictement positif par :

$$\begin{cases} p_1 &= \frac{1}{3} \\ p_{n+1} &= \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}.$$

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$.

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

PROBLÈME

12 points

Enseignement obligatoire et de spécialité

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x).$$

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de \mathbb{R} .
2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de g .
4. Donner le signe de $g(x)$.

B. Étude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x).$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.
2.
 - a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
On pourra remarquer que :

$$\text{si on pose } X = 1 + 2e^x, f(x) \text{ s'écrit } 4 \frac{X}{(X-1)^2} \frac{\ln X}{X}.$$

3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Tracer \mathcal{C} .

5. Soit α un réel strictement positif.

a. Vérifier que, pour tout réel x , $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$.

En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$.

b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx.$$

Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

C. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **B** est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle

$$(E') : y' + 2y = 0.$$

3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).