

EXERCICE 1

5 points

Enseignement obligatoire et de spécialité

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 2 cm, on considère les points A et B, d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f de P privée du point A dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i \left(\frac{z - 3i}{z + 1} \right)$ (1).

1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. À l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :
 $OM' = BM$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (modulo 2π).
4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
 - a. L'ensemble E des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (F) de centre O, de rayon 1.
 - b. L'ensemble F des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.
5. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 On note C_1 l'image de C par R.
 - a. Déterminer l'affixe de C_1 .
 - b. Montrer que C_1 appartient à l'ensemble E.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire

Une boîte contient 8 cubes : $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ gros rouge et } 3 \text{ petits rouges} \\ 2 \text{ gros verts et } 1 \text{ petit vert} \\ 1 \text{ petit jaune} \end{array} \right.$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).
 Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».
 - a. Calculer la probabilité de A.

- b. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
- a. Déterminer la loi de probabilité de X.
- b. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. L'enfant répète n fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note P_n la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.
- a. Déterminer P_n en fonction de n .
- b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0,99$.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement de spécialité

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.
- a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
- b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
- c. Résoudre (E').
2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).
3. On considère l'équation (E'') $A_3x + A_2y = 3296$.
- a. Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').
- b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

PROBLÈME

11 points

Enseignement obligatoire et de spécialité

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$.
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique : 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = -2 \ln x - xe + 1.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g .
3. Montrer que dans $[0,5; 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α .
Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit f' la fonction dérivée de f . Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$.
4. Donner le tableau de variations de f .
5. Construire Γ .

Partie C : Intégrale et suite

Soit $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t} dt$ et $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t) dt$ pour tout entier naturel n .

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}.$$

2.
 - a. Montrer que $A_n = I_n + e$.
 - b. Calculer I_0 et A_0 .
 - c. Donner une interprétation géométrique de A_0 .
3. Montrer que la suite (A_n) converge vers e .