

❧ Baccalauréat S Amérique du Sud ❧
décembre 2001

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (unité graphique : 2 cm). On considère la courbe \mathcal{C} dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) & \text{où } f(t) = 2(\cos^2 t + \cos t - 1) \\ y = g(t) & \text{où } g(t) = \sin^3 t + \sin t \end{cases} \quad \text{avec } t \in [-\pi; \pi]$$

On appelle $M(t)$ le point de la courbe \mathcal{C} défini par la valeur t du paramètre.

1.
 - a. Étudier les positions relatives de $M(t)$ et $M(-t)$.
 - b. Expliquer pourquoi il suffit alors, pour tracer \mathcal{C} , d'étudier f et g sur $[0; \pi]$.
Soit \mathcal{C}' la partie de \mathcal{C} correspondante.
2.
 - a. Montrer que $f'(t) = -2 \sin t (2 \cos t + 1)$. Étudier le signe de f' sur $[0; \pi]$.
 - b. Montrer que $g'(t) = \cos t (3 \sin^2 t + 1)$. Étudier le signe de g' sur $[0; \pi]$.
 - c. Dans un même tableau, faire figurer les variations de f et de g sur $[0; \pi]$.
3. On veut déterminer l'intersection de \mathcal{C}' et de l'axe des ordonnées.
 - a. À l'aide du 2. montrer que l'équation $f(t) = 0$ a une unique solution dans $[0; \pi]$.
Soit t_0 cette solution.
 - b. Donner une valeur approchée de t_0 à 10^{-1} près par défaut.
 - c. Déterminer une valeur approchée de $g(t_0)$.
4. Placer les points $M(0)$, $M(t_0)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $M(\pi)$.

Construire les tangentes à \mathcal{C}' parallèles aux axes de coordonnées. Tracer \mathcal{C}' puis en déduire la courbe \mathcal{C} .

EXERCICE 2

6 points (d'après Nathan)

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite numérique définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

1.
 - a. Montrer que (u_n) est majorée par 4.
 - b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
 - c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

- b. Retrouver le résultat du 1. c..
 - c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$v_n = n^2(4 - u_n).$$

EXERCICE 2

4 points

Candidats n'ayant pas pris l'enseignement de spécialité

On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Avec deux chiffres distincts x et y de E on crée un unique domino simple noté indifféremment

x	y
-----	-----

 ou

y	x
-----	-----

.

Avec un chiffre z de E , on forme un unique domino double noté

z	z
-----	-----

.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.
2. On tire au hasard un domino.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?
3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.
 Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\frac{4}{45}$ ». Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

EXERCICE 2

4 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \quad \text{et} \quad b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b .
2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n + 1$.
 Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

PROBLÈME

10 points.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$$

et sa courbe représentative \mathcal{C} dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 2 cm).

Partie A : étude de la fonction f

1.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour \mathcal{C} ?
 - b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur \mathbb{R} .
3. Dresser le tableau de variations de f .
4.
 - a. Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
 - b. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : étude d'une tangente

1. On rappelle que f'' désigne la dérivée seconde de f .
 - a. Montrer que, pour tout x réel, $f''(x) = 4(2x - 1)e^{-2x}$.

- b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.
2. Soit B le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ de la courbe \mathcal{C} . Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C} en B.
3. On veut étudier la position relative de \mathcal{C} et T : pour cela, on considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{e}x + \frac{3}{e} \right).$$

- a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.
- b. Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x .
En déduire le sens de variations de g' sur \mathbb{R} .
- c. En déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de g sur \mathbb{R} .
- d. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . Que peut-on en conclure sur la position relative de \mathcal{C} et T ?
4. Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) placer les points A et B puis tracer la tangente T et la courbe \mathcal{C} .

Partie C : calculs d'aire et de volume

1. Soit λ un réel strictement positif.
On note $A(\lambda)$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \lambda$.
- a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ .
- b. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.
2. a. On considère les fonctions h et H définies sur \mathbb{R} respectivement par :

$$h(x) = (2x + 1)^2 e^{-4x} \quad \text{et} \quad H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8} \right) e^{-4x}.$$

Montrer que H est une primitive de h sur \mathbb{R} .

- b. On considère le domaine E limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$.

On note V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe des abscisses.

On rappelle que V, en unités de volume, est exprimé par $V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx$.

Déterminer la valeur exacte de V en unités de volume puis une valeur approchée de V à 10^{-3} près.