Baccalauréat S Antilles – Guyane septembre 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & m\sin x & \text{pour } x \in [0\ ;\ \pi] \\ f(x) & = & 0 & \text{sinon.}\end{array}\right.$$

1. Déterminer le réel m tel que f soit une densité de probabilité.

2. Représenter f dans un repère orthonormé.

3. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.
Définir la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F dans un repère orthonormé.

4. Calculer la probabilité $p\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

5. Calculer les probabilités $p(X \geqslant 0)$ et $p(X \leqslant 0)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4\text{i}$ et $b = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
Calculer les distances OA, OB et AB.
En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des points pondérés (O ; -1), (D ; 1) et (B ; 1).

- **a.** Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6\text{i}$.
- **b.** Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1 cm).
- **c.** Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5.
- **a.** Justifier l'égalité $\dfrac{c-g}{a-g} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- **b.** En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{GA}},\ \overrightarrow{\text{GC}}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\dfrac{\text{GC}}{\text{GA}}$.
Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD$(a+b\,;\ ab) = p$, où p est un nombre premier.
   a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.)
   b. En déduire que p divise a.
   On constate donc, de même, que p divise b.
   c. Démontrer que PGCD$(a;b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.
   a. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl}\text{PGCD}(a,\ b) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

   b. En déduire les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\text{PGCD}(a+b,\ ab) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe $(\mathscr{C})$

1. **a.** Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\ln x = X$).
   b. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.
2. **a.** Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Calculer $f'(x)$.
   c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\text{e}^{\frac{5}{4}}$.
4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.
   Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \left(4\text{e}^{-\frac{5}{4}} - \frac{41}{8}\right).$$

   a. Montrer que $\varphi'(x) = \dfrac{4\ln x - 1}{x} - 4\text{e}^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer $\varphi''(x)$.
   b. Étudier le sens de variation de φ' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire que, pour tout x appartenant à $]0\,;\ +\infty[$, on a $\varphi'(x) \leqslant 0$.
   c. Calculer $\varphi\left(\text{e}^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0\,;\ +\infty[$ déterminer le signe de $\varphi(x)$.
   En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.

5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{T})$. (Unité graphique : 2 cm).

Partie B - Calcul d'une aire

1. Vérifier que la fonction h, définie par $x \longmapsto x\ln x - x$, est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. On pose $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_1.

b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathrm{I}_2 = \dfrac{5}{4}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.