Baccalauréat S Centres étrangers1 juin 2002

Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{array}\right.$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

   a. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
   b. Déterminer la limite de la suite w.

2. a. Montrer que la suite u est croissante.
   b. Montrer que la suite v est décroissante.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n r$

$\leqslant v_n \leqslant v_0$.

3. On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera l.
4. On appelle t la suite définie pour tout entier natureI n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

   a. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.
   b. Déterminer alors la valeur de l.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}\right)$.

Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \frac{\text{i}}{2}$.

$\mathscr{T}$ est l'application qui, à tout point M, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$2zz' = \text{i}(z + z').$$

1. On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_{\text{I}} = 1$, $z_{\text{J}} = \text{i}$. Soit K le milieu du segment [IJ].

   a. Déterminer l'affixe z_{K} de K.
   b. Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application $\mathscr{T}$.
   c. En déduire que $\mathscr{T}$ ne conserve pas les milieux.

2. Déterminer les points invariants par $\mathscr{T}$.
3. Montrer que $M' = \mathscr{T}(M)$ si et seulement si $\left(z' - \frac{\text{i}}{2}\right)\left(z - \frac{\text{i}}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.
4. En déduire l'image par $\mathscr{T}$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\mathbf{E} : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.
On suppose désormais $p \geqslant 2$ et que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation **E**.

2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.

- **a.** Montrer que x et y sont de parités différentes.
- **b.** Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
- **c.** En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

- **a.** Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|\ ;\ 2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.
- **b.** Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

- **a.** $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?
- **b.** Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

PROBLÈME **11 points**

Pour chaque entier naturel n, on définit, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction notée f_n par :

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A : Étude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.

2. Résolution graphique d'une inéquation :

- **a.** Justifier graphiquement l'inégalité suivante :

$$\text{pour tout réel } u,\ e^u \geqslant u + 1.$$

- **b.** En déduire que pour tout réel x,

$$e^{-x} + x - 1 \geqslant 0, \text{ puis que, } 1 + (x - 1)e^x \geqslant 0.$$

3. Limites :

- **a.** Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
- **b.** Déterminer la limite de f_0 en 0.

4. Sens de variations :

a. Montrer que, pour tout réel x appartenantà l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ on a $f_0'(x) = \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de f_0.

5. On appelle $\mathscr{C}_0$ la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}\right)$ pour lequel l'unité graphique est 2 cm.
Tracer $\mathscr{C}_0$ dans ce repère et placer le point A de coordannéw $(0\,;1)$.

Partie B : Étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}\right)$ précédent.

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.
En déduire que $\mathscr{C}_n$ possède une asymptote qu'on précisera.
3. Étudier les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$.
4. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
5. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel α_1, appartenant à l'intervalle $[0{,}2\,;\ 0{,}9]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
b. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$.
c. Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1\ ;\ 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

a. En utilisant la **partie A** montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;1]$,

$$\frac{e^x - 1}{x} \leqslant e - 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\ln(\alpha_n) \leqslant \dfrac{1-e}{n}$, puis que, $\alpha_n \geqslant e^{\frac{1-e}{n}}$.
c. Déterminer la limite de la suite (α_n).

6. Construire sur le graphique précédent, les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$.

Partie C : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on appelle I_n l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,dx.$$

1. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.
2. Étudier le sens de variation de la suite (I_n).
3. Démontrer que l'aire comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{n+1}$, et $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$ est constante.