

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

A	B	C	
			1
			2
			3

On note les évènements suivants :

- H: « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
- V: « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;
- D: « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
- N: « Les trois jetons ne sont pas alignés ».

Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Calculer les probabilités des trois évènements H, V et D.

En déduire que la probabilité de N est égale à $\frac{19}{21}$.

2. On considère la variable aléatoire X définie par :

- $X = 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
- $X = \alpha$, lorsque D est réalisé ;
- $X = -2$, lorsque N est réalisé.

Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.

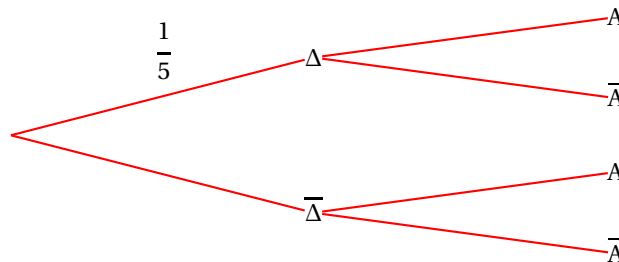
3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.

On note Δ l'évènement : « la machine M_1 est déréglée ».

- a. Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-à-dire $p_{\Delta}(H)$, puis de même, d'avoir un alignement vertical $p_{\Delta}(V)$, d'avoir un alignement en diagonale $p_{\Delta}(D)$.

- b. En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\frac{3}{28}$.

4. Δ désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \frac{1}{5}$. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant en précisant les cinq probabilités correspondantes :



EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité 2cm, on considère les points M d'affixe z , M_1 d'affixe \bar{z} , A d'affixe 2 et B d'affixe 1. Soit f l'application de \mathcal{P} privé de A dans \mathcal{P} , qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\bar{z} + 4}{\bar{z} - 2}$.

1. Déterminer les points invariants par f .
2. Soit C le point d'affixe $2(1 + i\sqrt{3})$.
Montrer que C' est le milieu du segment $[OC]$.
3.
 - a. Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $(\bar{z} - 2)(z' - 1)$.
 - b. En déduire :
 - la valeur de $AM_1 \cdot BM'$,
 - une expression de $(\vec{u}; \overrightarrow{BM'})$ en fonction de $(\vec{u}; \overrightarrow{AM_1})$.
 - c. Justifier les relations :

$$(1) \quad AM \cdot BM' = 6$$

$$(2) \quad (\vec{u}; \overrightarrow{BM'}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AM_1}).$$

- d. Application : construire l'image D' du point D d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le PGCD de α et β .
 - a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ .
 - b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.
3. On considère les nombres a et b définis par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n$$

$$b = 2n^2 - n - 1$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4.
 - a. On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d , puis que $\delta = d$.
 - b. En déduire le PGCD, Δ , de a et b en fonction de n .
 - c. Application :
Déterminer Δ pour $n = 2001$;
Déterminer Δ pour $n = 2002$.

PROBLÈME

15 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$$

et l'on désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 3 cm.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (\mathcal{C}) ?
2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0; +\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) en son point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique u . Montrer que u appartient à $[1; 2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .
5. Tracer (T) et (\mathcal{C}) sur la même figure.
6.
 - a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $\frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.
 - b. En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par (T), (\mathcal{C}) et la droite d'équation $x = 1$ (on admettra que T est au-dessus de (\mathcal{C})).

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}.$$

1. Calculer $f'_n(x)$ et donner son signe sur $[0; +\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
Dresser le tableau de variations de f_n .
2.
 - a. Calculer $f_n(n)$; quel est son signe?
 - b. Démontrer, par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N} , $e^{n+1} > 2n+1$.
En déduire le signe de $f_n(n+1)$.
 - c. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n; n+1]$; cette solution sera notée u_n
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.
4.
 - a. En remarquant que, pour tout x de $[0; +\infty[$: $\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2n}{x+n}$, montrer que la valeur moyenne, M_n de f_n sur $[0; u_n]$ est égale à :

$$1 - \frac{1}{u_n} + \frac{e^{-u_n}}{u_n} - 2 \left(\frac{n}{u_n} \right) \ln \left(\frac{u_n}{n} + 1 \right)$$

- b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.