

**Exercice 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour tout naturel  $n \geq 1$  on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$ .
2. Démontrer que pour tout naturel  $n \geq 1$  on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel  $n \geq 1$  on a :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A.$$

On pourra déterminer A en majorant la fonction :

$$t \longmapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} \quad \text{sur l'intervalle } [0; 1]$$

En déduire la limite quand  $n$  tend vers l'infini de :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

**Exercice 2**

**4 points**

**Enseignement obligatoire**

Dans le plan complexe  $\mathcal{P}$  rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = 2i, \quad z_B = i, \quad z_C = -1 + i, \quad z_D = 1 + i.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction  $f$  de  $\mathcal{P} - \{B\}$  dans  $\mathcal{P}$  qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  où

$$z' = i \frac{z - 2i}{z - i}.$$

- a. Développer  $(z + 1 - i)(z - 1 - i)$ .
- b. Chercher les points  $M$  vérifiant  $f(M) = M$  et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. a. Montrer que, pour tout  $z$  différent de  $i$ ,

$$|z'| = \frac{AM}{BM},$$

et que, pour tout  $z$  différent de  $i$  et de  $2i$ ,

$$\arg(z') = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

- b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z'| = 1$ .
- c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $\arg(z') = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ .
3. a. Démontrer que  $z' - i = \frac{1}{z - i}$  et en déduire que  $|z' - i| \times |z - i| = 1$ , pour tout complexe  $z$  différent de  $i$ .
- b. Soit  $M$  un point du cercle  $\mathcal{C}$  de centre B et de rayon  $\frac{1}{2}$ . Prouver que le point  $M'$  d'affixe  $z'$  appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

### Exercice 2

4 points

#### Enseignement de spécialité

Dans le plan complexe  $\mathcal{P}$  rapporté au repère orthonormal direct  $(A; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par :  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$  et C tel que ABCD soit un rectangle.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

- Soit E l'image de B par la translation de vecteur  $\overrightarrow{DB}$ . Déterminer l'affixe  $z_E$  de E.
- Déterminer les nombres réels  $a, b$  tels que le point F d'affixe  $z_F = 6 - i$  soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients  $a, b$  et 1.
- On considère la similitude  $s$  qui transforme A en E et B en F. À tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ , image de  $M$  par  $s$ .
  - Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .
  - Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude  $s$ .
  - Déterminer les images de C et de D par  $s$ .
  - Calculer l'aire de l'image par  $s$  du rectangle ABCD.
- a. Déterminer l'ensemble  $\Omega$  des points  $M$  du plan tels que :

$$\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9.$$

- b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de  $\Omega$  par  $s$ .

### Problème

11 points

Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x) > 0$ .
2.
  - a. Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{2} \cos x \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos x + \sin x$ .
  - b. En déduire que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $2 + \cos x + \sin x > 0$ .
  - c. Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
3.
  - a. Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$ .
  - b. En déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
4.
  - a. Montrer que, sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$ , l'équation  $f(x) = 3$  admet une solution unique  $\alpha$ .
  - b. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
5. Représenter la courbe  $\mathcal{C}$  sur  $[0 ; 4]$ .

### Partie B

On veut calculer l'aire  $\mathcal{A}$ , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .

1. Montrer que :  $\mathcal{A} = 2e - 2 + \int_0^1 \cos t e^{1-t} dt$ .
2. On pose :  $I = \int_0^1 \cos t e^{1-t} dt$  et  $J = \int_0^1 \sin t e^{1-t} dt$ .

a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I = -\cos 1 + e - J \quad \text{et} \quad J = -\sin 1 + I.$$

b. En déduire la valeur de  $I$ .

3. Déterminer la valeur exacte de  $\mathcal{A}$  en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de  $\mathcal{A}$  si à  $10^{-2}$  près par défaut.

### Partie C

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

1.
  - a. Montrer que la fonction  $h$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Calculer la primitive  $H$  de la fonction  $h$ , qui prend en 0 la valeur  $(1 + \ln 3)$ .
2.
  - a. Déterminer  $\ln[f(x)]$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
  - b. Étudier le sens de variations de la fonction  $H$ .
  - c. Déterminer le tableau de variations de  $H$ .
3. On appelle  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$ . (On ne demande pas de représenter  $\Gamma$ .) On appelle  $\Delta$  la droite d'équation  $y = -x + 1$ .
  - a. Étudier la position relative de  $\Gamma$  et de  $\Delta$ .
  - b. Déterminer les abscisses des points communs à  $\Gamma$  et  $\Delta$ .

4.
  - a. Établir une équation de la tangente  $T$  à  $\Gamma$  au point d'abscisse 0.
  - b. Étudier la position relative de  $\Gamma$  et  $T$ .
5. Montrer que la courbe  $\Gamma$  est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.