

Baccalauréat série S Pondichéry mars 2003

EXERCICE 1

4 points

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = a, \quad \text{et, pour tout entier } n, u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{8}$

- Calculer u_1 et u_2 .
- Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0; 2]$, la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f : x \mapsto x(2 - x)$.
- Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 .

2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0; 1[$.

- Montrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.
- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- Que peut-on en déduire?

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \frac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

- Exprimer, pour tout entier n , v_{n+1} en fonction de v_n .
- En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Première partie

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

- Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z - 2)(az^2 + bz + c) = 0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.
- En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_A = -2 - 2i, z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_D = -2 + 2i.$$

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.
3. Soit E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a. Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F .
 - b. Placer les points E et F.
4.
 - a. Vérifier que : $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.
 - b. En déduire la nature du triangle AEF.
5. Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité***Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante***Première partie**

ABC est un triangle direct du plan orienté.

On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].

Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe sur laquelle on raisonnera. Cette figure sera jointe à la copie.

d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α .

d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α .

d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α .

A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3 , B_1 celui de d_1 et d_2 et C_1 celui de d_2 et d_3 .

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1 . Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.
2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A - Construction de la figure

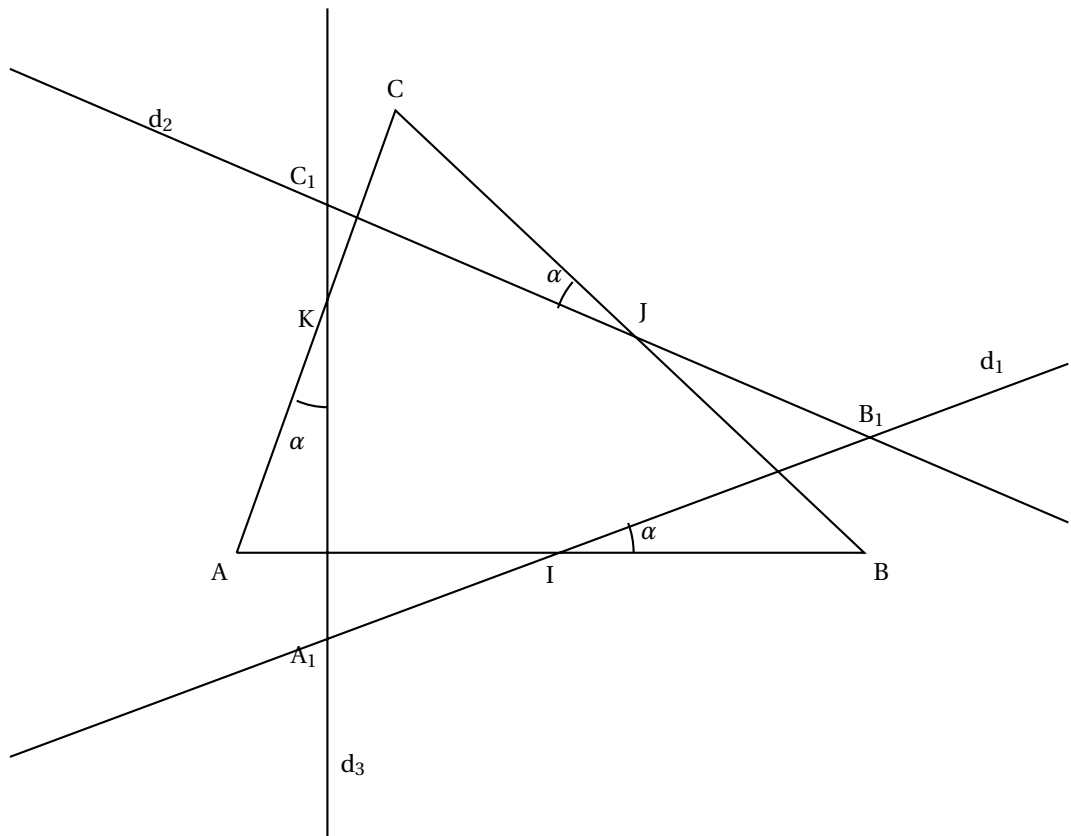
1. Placer les points $A(-4 - 6i)$, $B(14)$, $C(-4 + 6i)$, $A_1(3 - 7i)$, $B_1(9 + 5i)$ et $C_1(-3 - i)$.
2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.
3. Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.
On admettra que B_1, J, C_1 d'une part et C_1, K, A_1 d'autre part sont alignés.
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle (\vec{IB}, \vec{IB}_1) .
On admettra que $(\vec{KA}, \vec{KA}_1) = \frac{\pi}{4}$ et que $(\vec{JC}, \vec{JC}_1) = \frac{\pi}{4}$.
5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

B - Recherche d'une similitude directe transformant ABC en A₁B₁C₁

On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C en A₁, B₁ et C₁.

1. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 2i$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s .
2.
 - a. Déterminer le rapport et l'angle de s .
 - b. Déterminer l'affixe du centre Ω de s .
3. Que représente le point Ω pour ABC?

Le candidat joindra cette figure à sa copie

**PROBLÈME****11 points**

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

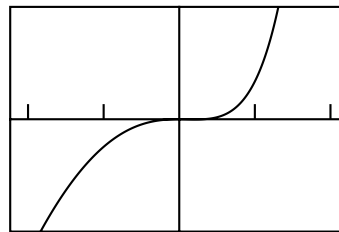
$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjectures

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

- a. le sens de variations de f sur $[-3; 2]$?
- b. la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?



Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
 - a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
 - b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
 - c. En déduire le sens de variations de la fonction g , puis dresser son tableau de variations.
 - d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans \mathbb{R} . On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
 - e. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Sens de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - a. Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
 - b. En déduire le sens de variations de la fonction f .
 - c. Que pensez-vous de votre première conjecture?

Partie B : contrôle de la deuxième conjecture

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$.
 - a. Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0; 1]$, puis déterminer le sens de variations de h sur $[0; 1]$.
 - b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3.
 - a. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec l'axe $(x'x)$.
 - b. Préciser alors la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à l'axe des abscisses.
 - c. Que pensez-vous de votre deuxième conjecture?

Partie C : tracé de la courbe

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de \mathcal{C} correspondant à l'intervalle $[-0,2; 0,4]$, dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) avec les unités suivantes :

- sur l'axe des abscisses 1 cm représentera 0,05.
- sur l'axe des ordonnées 1 cm représentera 0,001.

1. Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n \times 10^{-4}$ (n entier relatif).

x	-0,2	-0,15	-0,1	-0,05	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
$f(x)$													

2. Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D : calcul d'aire

On désire maintenant calculer l'aire du domaine \mathcal{D} délimité par la courbe Γ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln 2$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction :

$$x \mapsto x^2 e^x.$$

2. En déduire une primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f .
3. Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine \mathcal{D} puis en donner une valeur approchée en cm^2 .