Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2004

EXERCICE 1 — 3 points

Commun à tous les candidats

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(\mathrm{A},\ 1),\ (\mathrm{B},\ m),\ (\mathrm{C},\ 2m)\}.$$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 *point, chaque réponse fausse ou illisible enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à* 0.

Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	**V ou F**
G_1 est le milieu du segment [CI].	
G_1 est barycentre de $\left\{(\mathrm{J},\ 2),\ \left(\mathrm{C},\ \frac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.	
Pour tout m, distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}G_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AG}_{-1}}$.	
$\mathrm{IBG}_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2 + az + b) = 0.$$

b. Résoudre (E)

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2.$$

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si

$$x^2 - y^2 = 4.$$

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3-\mathrm{i}\sqrt{5}$ et $-3+\mathrm{i}\sqrt{5}$.
Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A′, B′ et C′, images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H′) l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).
- Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
- En utilisant la question **2. a.** prouver que : M' appartient à (H′) si et seulement si

$$x'y' = -2.$$

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A′, B′, C′, la courbe (H′), puis la courbe (H).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient les points A, A′, B et B′ d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1-2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{A'}} = -2+4\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 3-\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B'}} = 5\mathrm{i}.$$

1. **a.** Placer les points A, A′, B et B′ dans le plan complexe. Monter que ABB′A′ est un rectangle.

b. Soit s la réflexion telle que s(A)=A′ et s(B)=B′. On note (Δ) son axe.
Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z.
Montrer que

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 2\mathrm{i} - 1.$$

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 5 - \mathrm{i}.$$

a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b. Soit Ω le point d'affixe $1+\text{i}$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.

c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

a. Déterminer l'expression complexe de f.

b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.
Les trente cases, blanches (B), *jaunes* (J), *vertes* (V) *ou rouges* (R), *ont toutes la même probabilité d'être atteintes.*

Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.
Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.
Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $\text{E}(X)$ soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?

b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?

c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en **2. b.** ?

EXERCICE 4 **8 points**

Commun à tous les candidats

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\text{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\text{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n)$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

d. En déduire finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$