

∞ Baccalauréat Amérique du Sud série S ∞  
novembre 2003

EXERCICE 1

4 points

**Commun à tous les candidats**

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement  $-1, 0, 0, 1$  et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro  $x$  et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro  $y$  et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro  $z$  et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$ .

Sur le graphique joint en annexe page 6, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point  $M$ . Les coordonnées du point A sont  $(1; -1; -1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On note  $\mathcal{C}$  le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point  $M$  soit en A est égale à  $\frac{1}{64}$ .
2. On note  $E_1$  l'évènement : «  $M$  appartient à l'axe des abscisses ».  
Démontrer que la probabilité de  $E_1$  est égale à  $\frac{1}{4}$ .
3. Soit  $\mathcal{P}$  le plan passant par O et orthogonal au vecteur  $\vec{n}(1; 1; 1)$ .
  - a. Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .
  - b. Tracer en couleur sur le graphique de la page 5, la section du plan  $\mathcal{P}$  et du cube  $\mathcal{C}$ . (On ne demande pas de justification).
  - c. On note  $E_2$  l'évènement : «  $M$  appartient à  $\mathcal{P}$  ».  
Quelle est la probabilité de l'évènement  $E_2$ ?
4. On désigne par  $\mathcal{B}$  la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $OM \leq 1,5$ ).  
On note  $E_3$  l'évènement : «  $M$  appartient à la boule  $\mathcal{B}$  ».  
Déterminer la probabilité de l'évènement  $E_3$ .

EXERCICE 2

5 points

**Enseignement obligatoire**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 4 cm).

Soit I le point d'affixe 1. On note  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre  $\Omega$ .

**Partie I**

On pose  $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  et on note  $A_0$  son image.

1. Montrer que le point  $A_0$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$ .
2. Soit B le point d'affixe  $b$ , avec  $b = -1 + 2i$ , et  $B'$  le point d'affixe  $b'$  telle que  $b' = a_0 b$ .
  - a. Calculer  $b'$ .
  - b. Démontrer que le triangle  $OBB'$  est rectangle en  $B'$ .

**Partie II**

Soit  $a$  un nombre complexe non nul et différent de 1, et  $A$  son image dans le plan complexe.

À tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = az$ .

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points  $A$  tels que le triangle  $OMM'$  soit rectangle en  $M'$ .

a. Interpréter géométriquement  $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$ .

b. Montrer que  $(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ ).

- c. En déduire que le triangle  $OMM'$  est rectangle en  $M'$  si et seulement si  $A$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  privé de  $O$  et de  $I$ .

2. Dans cette question,  $M$  est un point de l'axe des abscisses, différent de  $O$ .

On note  $x$  son affixe.

On choisit  $a$  de manière que  $A$  soit un point de  $\mathcal{C}$  différent de  $I$  et de  $O$ .

Montrer que le point  $M'$  appartient à la droite  $(OA)$ .

En déduire que  $M'$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur cette droite.

**EXERCICE 2****5 points****Enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 1 cm).

On note  $r_1$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $r_2$  la rotation de centre  $O$  et d'angle

$$\frac{\pi}{5}.$$

**Partie A**

1. Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $3y = 5(15 - x)$ .

2. Soit  $I$  le point d'affixe 1.

On considère un point  $A$  mobile sur le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  de centre  $O$ . Sa position initiale est en  $I$ .

On appelle  $d$  la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point  $A$  sur le cercle  $\mathcal{C}$  après avoir subi  $p$  rotations  $r_1$  et  $q$  rotations  $r_2$  ( $p$  et  $q$  étant des entiers naturels).

On convient que lorsque  $A$  subit la rotation  $r_1$  (respectivement  $r_2$ ), il parcourt une distance de  $\frac{\pi}{3}$  cm (respectivement  $\frac{\pi}{5}$  cm).

Déterminer toutes les valeurs possibles de  $p$  et  $q$  pour lesquelles le point  $A$  a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle  $\mathcal{C}$  à partir de  $I$ .

**Partie B**

On note  $h_1$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 4 et  $h_2$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-6$ . On pose  $s_1 = r_1 \circ h_1$  et  $s_2 = r_2 \circ h_2$ .

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de  $s_1$  et  $s_2$ .

2. On pose :

$$S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1 \text{ (composée de } m \text{ fois } s_1, m \text{ étant un entier naturel non nul),}$$

$S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$  (composée de  $n$  fois  $s_2$ ,  $n$  étant un entier naturel non nul),  
et  $f = S'_n s_1 \circ S_m$ .

- a. Justifier que  $f$  est la similitude directe de centre  $O$ , de rapport  $2^{2m+n} \times 3^n$  et d'angle  $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$ .
- b.  $f$  peut-elle être une homothétie de rapport 144?
- c. On appelle  $M$  le point d'affixe 6 et  $M'$  son image par  $f$ .  
Peut-on avoir  $OM' = 240$ ?  
Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique  $(m, n)$  tel que  $OM' = 576$ .  
Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$ .

**PROBLÈME****11 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

1. Étudier la parité de  $f$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $\Gamma$ ?
2. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $e^{-x} \leq e^x$ .
3.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .
4. On considère les fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{e^x}$  et  $h(x) = \frac{1}{2e^x}$ .  
Sur l'annexe de la page 7 sont tracées, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les courbes représentatives de  $g$  et  $h$ , notées respectivement  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .
  - a. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ .
  - b. Que peut-on en déduire pour les courbes  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ , et  $\Gamma_2$ ?  
Tracer  $\Gamma$  sur l'annexe de la page 7, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

**Partie B**

Soit  $(I_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ .

1. Justifier l'existence de  $(I_n)$ , et donner une interprétation géométrique de  $(I_n)$ .
2.
  - a. Démontrer, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$ .
  - b. En déduire que la suite  $(I_n)$  est décroissante.
  - c. Démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**Partie C**

Soit  $(J_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $J_n = \int_0^n f(x) dx$ .

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A. 4. a., démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1.$$

2. Démontrer que la suite  $(J_n)$  est croissante.  
En déduire qu'elle converge.
3. On note  $L$  la limite de la suite  $(J_n)$  et on admet le théorème suivant :  
« Si  $u_n, v_n$  et  $w_n$  sont trois suites convergentes de limites respectives  $a, b$  et  $c$  et si, à partir d'un certain rang on a pour tout  $n$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ , alors  $a \leq b \leq c$  ».  
Donner un encadrement de  $L$ .
4. Soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

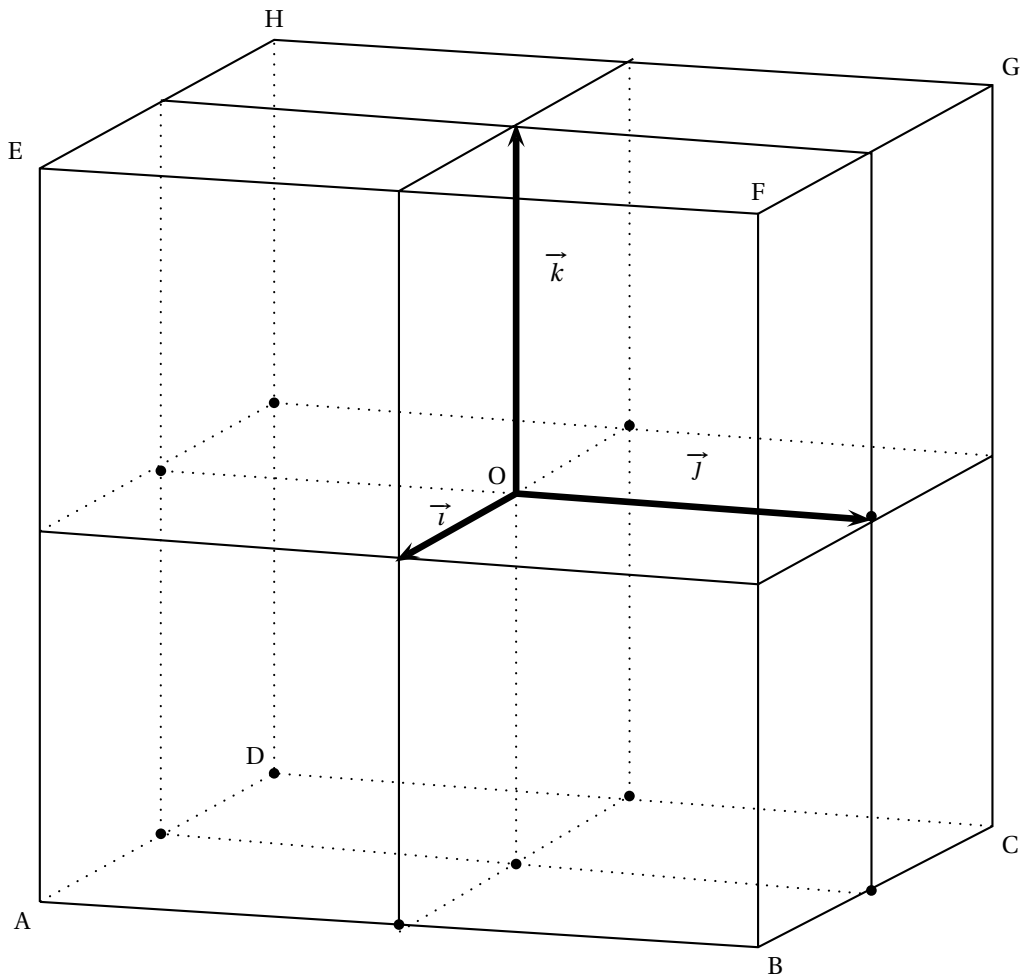
On note  $v$  la primitive de  $u$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $v(1) = \frac{\pi}{4}$ .

On admet que la courbe représentative de  $v$  admet en  $+\infty$  une asymptote d'équation  $y = \frac{\pi}{2}$ .

- a. Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$ .
- b. Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f$  est la dérivée de la fonction  $x \mapsto v(e^x)$ .
- c. En déduire la valeur exacte de  $L$ .

## Annexe de l'exercice 1

Cette page sera complétée et remise avec la copie



## Annexe du problème

Cette page sera complétée et remise avec la copie

