Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le quadrilatère ABCD tel que :

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \alpha \quad [2\pi], \left(\overrightarrow{\text{CD}}, \overrightarrow{\text{CB}}\right) = \beta \quad [2\pi], 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$\left(\overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DQ}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{\text{BA}}, \overrightarrow{\text{BM}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{BC}}, \overrightarrow{\text{BN}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Soit a,b,c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m,n,p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)+b, \qquad n = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)+b,$$

$$p = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c-d)+d, \qquad q = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-d)+d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

a. Démontrer que MNPQ est un parallélogrammme.

b. Démontrer que l'on a :

$$\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{AC} = \text{QP}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{et} \quad \text{NP} = \text{BD}.$$

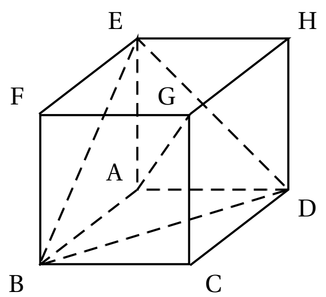
3. Démontrer que MNPQ est un carré si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD vérifient :

$$\text{AC} = \text{BD} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

où k est un entier relatif.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère Ie cube ABCDEFGH ci-contre.
O_1 et O_2 sont Ies centres des carrés ABCD et EFGH, et I est Ie centre de gravité du triangle EBD.
Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :



$$\{(\mathrm{E}\ ;\ 1),\ (\mathrm{B}\ ;\ 1-m),\ (\mathrm{G}\ ;\ 2m-1),\ (\mathrm{D}\ ;\ 1-m)\}$$

.

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
3. Vérifier que $\mathrm{G}_0 = \mathrm{A}$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{A}G_m} = m\overrightarrow{\mathrm{AO}_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. **a.** Vérifier que les points A, G_m , E et O_1, sont coplanaires.
   b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan ABD.
2. Déterminer les coordonnées du point G_m.
3. Pour quelles valeurs de m, la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?

EXERCICE 3 **11 points**

Partie A Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x] = 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2e^{-2x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées).

1. **a.** Soit Ie polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = 1 + X - 2X^2$.
   Étudier Ie signe de $P(X)$.
   b. En déduire Ie signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. Vérifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2\right)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. **a.** Soit f' la fonction dérivee de la fonction f, calculer $f'(x)$.
   b. Montrer que $f'(x)$ a Ie même signe que $(4 - \mathrm{e}^{x})$, puis étudier Ie signe de $f'(x)$.
   c. Dresser Ie tableau de variations de f. On montrera que Ie maximum est un nombre rationnel.
5. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.
   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport a la droite $\mathscr{D}$.
6. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
7. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B Étude d'une suite

1. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} \left[f(x) - 1\right] \,\mathrm{d}x.$$

   a. Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs.
   b. Donner une interprétation géométrique de (u_n).

3. **a.** En utilisant Ie sens de variation de f, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$:
si $x \in [(n-1)+\ln 2\ ;\ n+\ln 2]$ alors

$$f(n+\ln 2) - 1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant f\left[(n-1)+\ln 2\right] - 1.$$

   b. En déduire que, pour tout n, $n \geqslant 2$, on a :

$$f(n+\ln 2) - 1 \leqslant u_n \leqslant f\left[(n-1)+\ln 2\right] - 1.$$

   c. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.
   d. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. Soit la suite (S_n) définie pour $n > 0$, par

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

   a. Écrire S_n à l'aide d'une intégrale.
   b. Interpréter géométriquement S_n.
   c. Calculer S_n et déterminer la limite de la suite (S_n).