

# Baccalauréat S La Réunion juin 2004

## EXERCICE 1

4 points

### Commun à tous les candidats

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}.$$

Son tableau de variations est le suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1	0	1

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}$  et son asymptote  $\Delta$ , d'équation  $y = 1$ , sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

### A - Lecture graphique

1.  $k$  est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de  $k$  le nombre de solutions dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  de l'équation  $f(x) = k$ .
2.  $n$  étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet deux solutions distinctes.

### B - Définition et étude de deux suites

1. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  admet deux solutions  $u_n$  et  $v_n$  respectivement comprises dans les intervalles  $[0 ; 1]$  et  $[1 ; +\infty[$ .
2. Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels  $u_n$  et  $v_n$  pour  $n$  appartenant à l'ensemble  $\{2 ; 3 ; 4\}$ .
3. Déterminer le sens de variation des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite. Procéder de même pour la suite  $(v_n)$ . En déduire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

## EXERCICE 2

5 points

### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ;  $i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

Soient les points A, B et C d'affixes respectives  $i$ ,  $1+i$  et  $-1+i$ .

Soit  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  du plan différent de A, d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  du plan d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{iz+2}{z-i}.$$

1. a. Déterminer les images de B et de C par l'application  $f$ .

- b. Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $i$ , on a la relation :

$$(z' - i)(z - i) = 1.$$

- c. Soit  $D$  le point d'affixe  $1 + 2i$ . Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sur une figure (unité graphique 4 cm).

Déduire de la question précédente une construction du point  $D'$  image du point  $D$  par l'application  $f$ .

2. Soit  $R$  un nombre réel strictement positif.  
Quelle est l'image par l'application  $f$  du cercle de centre  $A$  et de rayon  $R$ ?
3. a. Montrer que, si l'affixe du point  $M$  est un imaginaire pur différent de  $i$ , alors l'affixe du point  $M'$  est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application  $f$  de l'axe imaginaire privé du point  $A$ ?
- b. Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . Déterminer l'image de la droite  $\mathcal{D}$  privée du point  $A$  par l'application  $f$ .

## EXERCICE 2

5 points

## Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit  $p$  un nombre premier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$  ; alors  $a^{p-1} - 1$  est divisible par  $p$  ».

1. Soit  $p$  un nombre premier impair.
- a. Montrer qu'il existe un entier naturel  $k$ , non nul, tel que  $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ .
- b. Soit  $k$  un entier naturel non nul tel que  $2^k \equiv 1 \pmod{p}$  et soit  $n$  un entier naturel. Montrer que, si  $k$  divise  $n$ , alors  $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ .
- c. Soit  $b$  tel que  $2^b \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $b$  étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.  
Montrer, en utilisant la division euclidienne de  $n$  par  $b$ , que si  $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ , alors  $b$  divise  $n$ .
2. Soit  $q$  un nombre premier impair et le nombre  $A = 2^q - 1$ .  
On prend pour  $p$  un facteur premier de  $A$ .
- a. Justifier que :  $2^q \equiv 1 \pmod{p}$ .
- b. Montrer que  $p$  est impair.
- c. Soit  $b$  tel que  $2^b \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $b$  étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.  
Montrer, en utilisant 1. que  $b$  divise  $q$ . En déduire que  $b = q$ .
- d. Montrer que  $q$  divise  $p - 1$ , puis montrer que  $p \equiv 1 \pmod{2q}$ .
3. Soit  $A_1 = 2^{17} - 1$ . Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme  $34m + 1$ , avec  $m$  entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que  $A_1$  est premier.

## EXERCICE 3

5 points

## Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

- $B_1$ , contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5880 sont exactes,  
 $B_2$ , contenant 4000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6000 réalisées à l'aide de  $B_1$ . La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$A: \frac{\binom{120}{3} + \binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \quad B: \frac{3}{120}$$

$$C: \binom{10}{3} \times \binom{120}{6000}^3 \times \binom{5880}{6000}^7 \quad D: \binom{10}{3} \times \binom{3}{120}^3 \times \binom{7}{5880}^7$$

2. Parmi les 10000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de  $B_1$  est :

$$A: 0,98 \quad B: \frac{0,4 \times 0,95}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,02} \quad C: 0,6 \times 0,98 \quad D: \frac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}$$

#### Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité  $p$  de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  (loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0005$ ). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant  $t$  est :

$$p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2500 heures est :

$$A: e^{-\frac{2500}{2000}} \quad B: e^{\frac{5}{4}} \quad C: 1 - e^{-\frac{2500}{2000}} \quad D: e^{-\frac{2000}{2500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule : E

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

- a. L'intégrale  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$  est égale à :

$$A: \lambda \frac{t^2}{2} e^{-\lambda t} \quad B: -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \quad C: \lambda te^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} - \lambda \quad D: te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

- b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

$$A: 3500 \quad B: 2000 \quad C: 2531,24 \quad D: 3000$$

#### EXERCICE 4

6 points

##### Commun à tous les candidats

On désigne par  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et par  $f'$  sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- (1) pour tout nombre réel  $x$ ,  $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ ,
- (2)  $f'(0) = 1$ ,
- (3) la fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$ .
- b. Calculer  $f(0)$ .

- 
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :  
(4) pour tout nombre réel  $x$ ,  $f''(x) = f(x)$ , où  $f''$  désigne la fonction dérivée seconde de la fonction  $f$ .
3. On pose :  $u = f' + f$  et  $v = f' - f$ .
- Calculer  $u(0)$  et  $v(0)$ .
  - Démontrer que  $u' = u$  et  $v' = -v$ .
  - En déduire les fonctions  $u$  et  $v$ .
  - En déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .
4.
  - Étudier les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
5.
  - Soit  $m$  un nombre réel. Démontrer que l'équation  $f(x) = m$  a une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - Déterminer cette solution lorsque  $m = 3$  (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à  $10^{-2}$  près).

## ANNEXE DE L'EXERCICE 1

**À compléter et à rendre avec la copie**