

EXERCICE 1

7 points

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
 - c. Construire Γ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2.
 - a. Montrer que, pour tout réel m de $]0; \frac{1}{e}[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
 - b. Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
 - c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

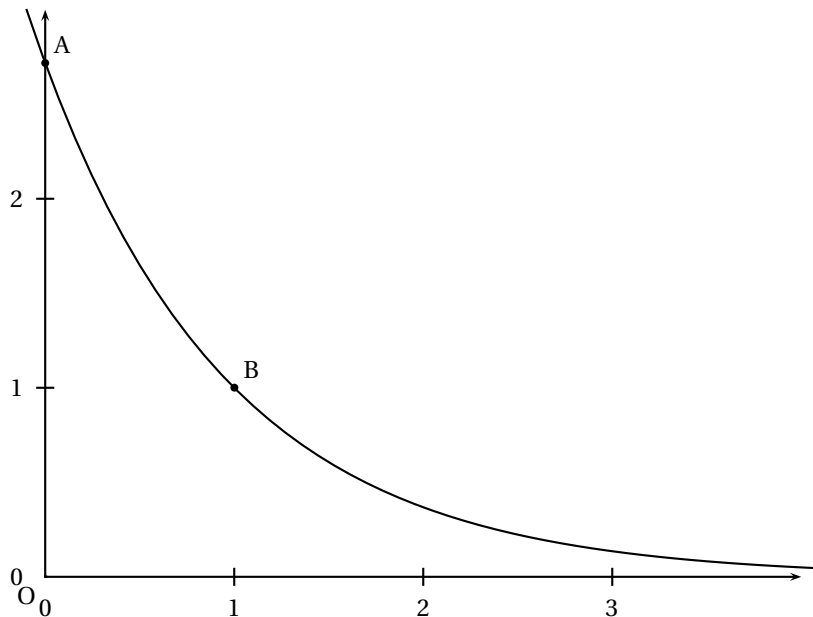
$$\begin{cases} u_0 &= \alpha \\ u_{n+1} &= u_n e^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où α est le réel défini à la question A. 2. b.

- a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_n = \ln u_n$.
 - a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
 - b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
 - c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
3. On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$.
Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $u_n = v_n$?
Si oui, préciser laquelle.

EXERCICE 2

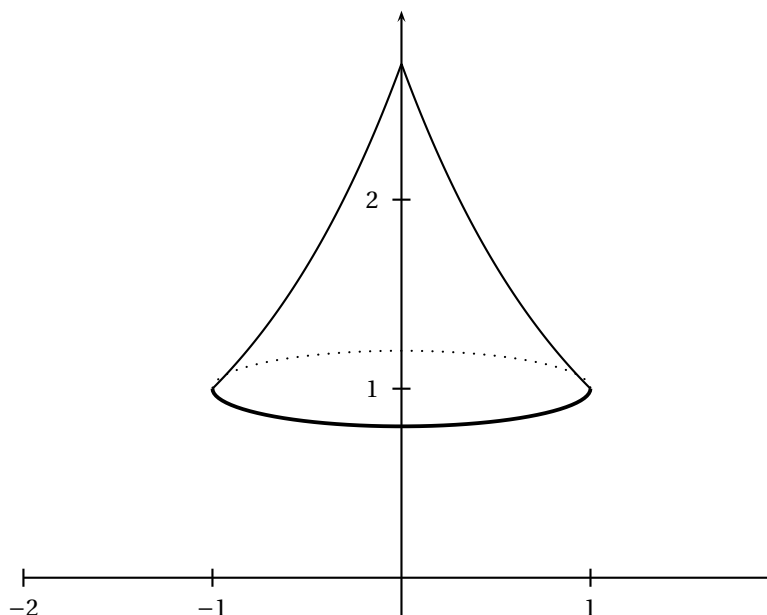
3 points



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative de la fonction f dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad f(0) = e.$$

1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1; e]$.
Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x .
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe \widehat{AB} comme représenté ci-dessous. On note V son volume.
On admet que $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$.
Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



EXERCICE 3**5 points**

On note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note A_0 l'évènement ; « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
On note A_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
On note A_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».
Calculer les probabilités de A_0 , A_1 et A_2 .
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note B_0 l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »
On note B_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 »
On note B_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »
 - a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
 - b. En déduire $p(B_0)$.
 - c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.
 - d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'évènement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».
Montrer que $p(R) = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 4**5 points****Partie A**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre [OP].

On désigne par Ω le centre de Γ .

Soit A, B, C les points d'affixes respectives a , b et c , où $a = 5 + 5i$, $b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ .
2. Soit D le point d'affixe $2 + 2i$.
Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B

À tout point M du plan différent de O, d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{20}{\bar{z}} \quad \text{où } z \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z .
On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M .
 - a. Vérifier que $z + \bar{z} = 4$.

- b. Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et \overline{z} et en déduire que $5(z' + \overline{z'}) = z'\overline{z'}$.
- c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ .
Placer M' sur la figure.

EXERCICE 4

5 points

Exercice de spécialité

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre pour unité.

Soit S la similitude de centre A_0 , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, B_{n+1} = S(B_n).$$

1. Construire B_1 , B_2 , B_3 et B_4 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.
3. On définit la suite (l_n) par : pour tout entier naturel n , $l_n = B_nB_{n+1}$.
 - a. Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
 - b. Exprimer l_n en fonction de n et de l_0 .
 - c. On pose $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \dots + l_n$.
Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4.
 - a. Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.
 - b. Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0) .
Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , B_n appartient-il à Δ ?