

Exercice n° 1 (enseignement obligatoire)

1. **Démonstration de cours.** Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leq k < n-1$, on a :

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}.$$

3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \leq k < n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.

On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'événement « au moins une boule rouge a été tirée ».

- (a) Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'événement \bar{A} , contraire de A .
En déduire la probabilité de A .
- (b) Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'événement A et montrer, à l'aide la formule obtenue à la question 2, que l'on retrouve le même résultat.

Exercice n° 2 (enseignement obligatoire)

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbf{R} .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0			2	
		\searrow		\nearrow	\searrow
			\nearrow	0	
			-1		1

On définit la fonction F qui, à tout réel x , associe $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Quel est le sens de variation de la fonction F ?
2. Déterminer deux entiers strictement positifs a et b tels que $a \leq F(2) \leq b$.
3. Étudier la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice n° 3 (enseignement obligatoire)

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbf{R} .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0		0	2	1
		\searrow	\nearrow	\searrow	
			-1		

- On considère les intégrales $I = \int_0^3 f(t) dt$, $J = \int_{-5}^{-2} f(t) dt$ et $K = \int_{-1}^1 f(t) dt$.
Pour une seule de ces intégrales, on peut affirmer qu'elle est positive et pour une seule, on peut affirmer qu'elle est négative. Préciser ces deux intégrales et justifier ce choix.
- (a) À l'aide des informations contenues dans le tableau de variations de f , donner un encadrement par des nombres entiers de chacune des intégrales $A = \int_0^1 f(t) dt$ et $B = \int_1^2 f(t) dt$.
(b) Donner un encadrement de l'intégrale $C = \int_0^2 f(t) dt$.
- Étudier la limite de $\int_0^x f(t) dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice n° 4 (enseignement obligatoire)

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée.

- Les propositions vraies sont des conséquences immédiates de théorèmes du programme de terminale ; la démonstration consiste à énoncer le théorème.
- Pour les propositions fausses, la démonstration consiste à fournir un contre exemple (un graphique sera accepté).
- Une réponse non démontrée ne rapporte pas de point.

On considère une fonction f définie et continue sur \mathbf{R} .

- On a : $\int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx$.
- On a $\int_1^2 (-f(x)) dx = - \int_1^2 f(x) dx$.
- Si f est positive sur \mathbf{R} alors, pour tout réel t , $\int_0^t f(x) dx$ est un nombre réel positif.
- Si $\int_0^1 f(x) dx$ est un nombre positif alors la fonction f est positive sur $[0, 1]$.

Exercice n° 5 (enseignement obligatoire)

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un nombre réel a appartenant à I .

1. Rappeler la définition de « f est dérivable en a ».
2. Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il existe une fonction f vérifiant simultanément les deux propriétés. Si la réponse est « oui », donner un exemple (un graphique sera accepté); dans le cas contraire, justifier la réponse à l'aide d'un théorème du cours.
 - f est continue en a et f est dérivable en a ;
 - f est continue en a et f n'est pas dérivable en a ;
 - f n'est pas continue en a et f est dérivable en a ;
 - f n'est pas continue en a et f n'est pas dérivable en a .

Exercice n° 6 (enseignement obligatoire)

Soit (u_n) une suite. On considère les propriétés suivantes :

- P₁ la suite (u_n) est majorée;
- P₂ la suite (u_n) n'est pas majorée;
- P₃ la suite (u_n) converge;
- P₄ la suite (u_n) tend vers $+\infty$;
- P₅ la suite (u_n) est croissante.

1. Donner la traduction mathématique de la propriété P₁.
2. Si les propriétés P₁ et P₅ sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (on ne demande pas de justifier la réponse) ?
3. Si les propriétés P₂ et P₅ sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (on ne demande pas de justifier la réponse) ?
4. Une suite vérifiant la propriété P₄ vérifie-t-elle nécessairement la propriété P₂ (on demande de justifier la réponse) ?

Exercice n° 7 (enseignement obligatoire)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On rappelle que pour tout vecteur \vec{w} non nul, d'affixe z , on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$, défini à $2k\pi$ près (avec k entier relatif).

Dans cet exercice, on prend comme prérequis le résultat suivant :

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

1. Soit z et z' sont deux nombres complexes non nuls, **démontrer que**
 $\arg \frac{z}{z'} = \arg(z) - \arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

On note A et B les points d'affixes respectives $2i$ et -1 .

À tout nombre complexe z , distinct de $2i$, on associe le nombre complexe

$$Z = \frac{z+1}{z-2i}.$$

2. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z \neq -1$.
3. Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants :
 - (a) L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel strictement négatif.
 - (b) L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur non nul.

Exercice n° 8 (enseignement obligatoire)

Préciser si chacune des quatre affirmations suivantes est « VRAIE » ou « FAUSSE ». Chaque fois que la réponse est « FAUSSE » une justification doit être donnée.

1. Pour tout nombre réel a et tout nombre réel b , $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$.
2. Pour tout nombre réel a et tout nombre réel b , $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.
3. Il existe un nombre réel a et un nombre réel b , tels que $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.
4. Il existe un nombre réel a et un nombre réel b , tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$.

Exercice n° 9 (spécialité)

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0})$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

- A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;
 - B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n) .
1. Représenter le triangle OA_0B_0 , puis construire les points $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$.
 2. (a) **Démonstration de cours.** Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A_0 en A_1 et B_0 en B_1 .
 - (b) Soit s cette similitude : préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est O . Démontrer que, pour tout entier naturel n , la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1} .
 3. (a) Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.
 - (b) On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4) . Démontrer que le triangle $A_0\Omega B_0$ est isocèle en Ω .
 - (c) Calculer la distance A_0B_4 .
 - (d) Démontrer que $\Omega A_0 = 4\Omega B_4$.
 - (e) En déduire l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$.

Exercice n° 10 (spécialité)

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0})$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

- A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;
 - B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n) .
1. Représenter le triangle OA_0B_0 , puis construire les points $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$.
 2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A_0 en A_1 .
 - (a) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s , puis montrer que la similitude s transforme B_0 en B_1 .
 - (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1} .
 3. (a) Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.
 - (b) On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4) . Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$ (tout élément de réponse, par exemple l'exposé d'une méthode ou la détermination d'une valeur approchée, sera pris en compte).

Exercice n° 11 (enseignement obligatoire)

Prérequis : la fonction exponentielle, notée \exp , a les trois propriétés suivantes :

1. \exp est une fonction dérivable sur \mathbf{R} ;
2. sa fonction dérivée, notée \exp' , est telle que, pour tout nombre réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$;
3. $\exp(0) = 1$.

En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction \exp , **démontrer** successivement que :

- Pour tout nombre réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$;
- pour tout nombre réel a et tout nombre réel x , $\exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

Exercice n° 12 (enseignement obligatoire)

Soit b un nombre réel strictement positif.

1. Exprimer en fonction de b un nombre A_1 tel que pour tout nombre réel x strictement positif supérieur à A_1 on ait $\frac{1}{x} < b$.
2. Exprimer en fonction de b un nombre A_2 tel que pour tout nombre réel x positif supérieur à A_2 on ait $\frac{1}{2x+1} < b$.
3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ telle que pour tout x de cet intervalle on ait $\frac{-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.
 - (a) Proposer un nombre réel A , à exprimer en fonction de b , tel que pour tout nombre réel x positif supérieur ou égal à A on ait $f(x) \in]-b, b[$.
 - (b) Quelle propriété de la fonction f est démontrée à la question (a) ?
 - (c) Proposer une autre justification de cette propriété de la fonction f à l'aide d'un théorème figurant au programme de terminale S. On énoncera ce théorème avec précision.

Exercice n° 13 (enseignement obligatoire)

Partie A Démonstration de cours.

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

1. Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geq M$.
Démontrer que pour tout entier naturel n , si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq M$.
2. Quelle conséquence peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?
3. Énoncer le théorème du cours ainsi démontré.

Partie B

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes :

- a. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- b. Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.
- c. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
- d. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

Exercice n° 14 (enseignement obligatoire)

Partie I

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour chacune des affirmations suivantes répondre sans justification par Vrai ou Faux :

- (A) Toute suite bornée est convergente.
- (B) Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.
- (C) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie II

Pour chacune des propositions de la première partie, justifier la réponse donnée :

- dans le cas où la proposition vous paraît fausse : en donnant un contre-exemple.
- dans le cas où la proposition vous paraît exacte : en donnant une démonstration.

Exercice n° 15 (enseignement obligatoire)

Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On prendra comme prérequis la définition suivante :

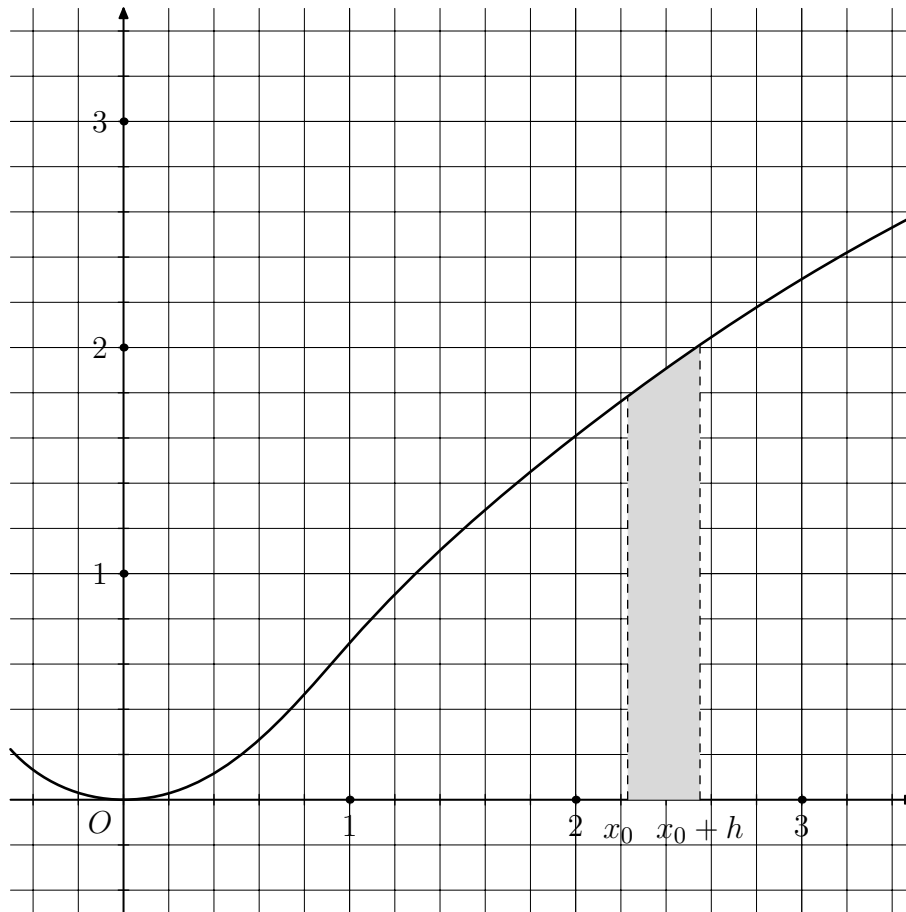
Définition : H est une primitive de h sur un intervalle I si et seulement si H est dérivable sur I et si pour tout x de I on a $H'(x) = h(x)$.

Dans la suite on note f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(t) = \ln(t^2 + 1)$.

1. Expliquer pourquoi f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

La fonction f est représentée ci-dessous :



Pour $\alpha \geq 0$, on note $A(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \alpha$.

3. Soit x_0 un réel strictement positif.

(a) Soit h un réel strictement positif. En utilisant des rectangles convenablement choisis, établir l'encadrement :

$$\ln(1 + x_0^2) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq \ln(1 + (x_0 + h)^2).$$

(b) Quel encadrement peut-on obtenir de la même manière pour $-x_0 \leq h < 0$?

(c) **Démontrer** que la fonction A est dérivable en x_0 . Quel est le nombre dérivé de A en x_0 ?

4. Quel lien a-t-on établi entre les fonctions A et f sur $]0, +\infty[$?

Exercice n° 16 (spécialité)

1. Démonstration de cours.

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

2. Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.

Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »

Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4, notons $A = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.

3. Montrer que B est congru à -1 modulo 4.
4. Soit q un diviseur premier de B . Montrer que q est distinct de chacun des nombres p_1, p_2, \dots, p_n précédents.
Montrer que parmi les diviseurs premiers de B , l'un au moins est congru à -1 modulo 4.
5. Quelle réponse apporter à la question posée ?

Exercice n° 17 (enseignement obligatoire)

On cherche les nombres réels a strictement positifs et les fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[a, +\infty[$, vérifiant, pour tout x supérieur ou égal à a , la relation $\int_a^x f(t) dt = 2 \ln x$.

Démontrer que le problème posé a une et une seule solution, que l'on déterminera.

Exercice n° 18 (enseignement obligatoire)

Soit a un réel strictement positif.

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, rappeler la nature de l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $x^2 + y^2 = a^2$.
2. On pose $I(a) = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$. En interprétant $I(a)$ comme une aire déterminer a pour que l'on ait $I(a) = \pi$.

Exercice n° 19 (enseignement obligatoire)

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit t la translation de vecteur $\vec{w} = 2\vec{u}$ qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' . Donner l'écriture complexe de la transformation t , c'est-à-dire l'expression de z' en fonction de z .
2. Soit r la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que $z_1 = -iz + 4i$.
 - (a) Déterminer un point Ω tel que $r(\Omega) = \Omega$.
 - (b) Démontrer que r est une rotation de centre Ω dont on précisera l'angle.
3. Déterminer la nature de la transformation $r \circ t$.

Exercice n° 20 (enseignement obligatoire)

Partie I

φ est la fonction définie sur $]0, 1]$ par $x \mapsto \varphi(x) = -\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Pour un événement A de probabilité $P(A)$ non nulle, on pose $i(A) = \varphi(P(A))$. En théorie de l'information, ce nombre $i(A)$ est appelé *incertitude de l'événement* A .

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « la carte tirée est la dame de cœur ». Que valent $P(A)$ et $i(A)$?
2. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois une pièce équilibrée. A est l'événement « obtenir n fois PILE ». Déterminer $i(A)$.
3. Que vaut $i(A)$ lorsque $P(A) = 1$? Commenter le résultat.
4. Si A et B sont deux événements indépendants pour la probabilité P et si $P(A \cap B) \neq 0$, démontrer que $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat en termes d'incertitude ?

Partie II

h est la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$h(0) = 0 \text{ et, pour tout } x \text{ de }]0, 1], h(x) = -x \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

On admet que h est continue sur $[0, 1]$.

On définit également la fonction h_1 sur $[0, 1]$ par $h_1(x) = h(x) + h(1-x)$.

1. Dresser le tableau de variations de h_1 .
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On appelle incertitude moyenne de X la quantité $h_1(p)$.
 - (a) Donner la valeur de p pour laquelle $h_1(p)$ est maximum.
 - (b) Commenter ce résultat.

Exercice n° 21 (enseignement obligatoire)

Dans une pièce à température constante de 20°C , à l'instant initial, noté 0, la température $\theta(0)$ d'un liquide est égale à 70°C .

Cinq minutes plus tard, elle est de 60°C .

On admet que la température θ du liquide est une fonction dérivable du temps t , exprimé en minutes, et que $\theta'(t)$ est proportionnel à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce. On notera a le coefficient de proportionnalité, $a \in \mathbf{R}$.

1. Démonstration de cours.

Soit (E) l'équation différentielle $z' = az$.

Prérequis : la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est solution de l'équation (E).

Démontrer que toute solution de (E) est de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

2. Résoudre l'équation différentielle : $y' = ay - 20a$.
3. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

Exercice n° 22 (enseignement obligatoire)

Soit (u_n) une suite telle que les suites de terme général $v_n = 1 + u_n$ et $w_n = 3 - u_n$ soient adjacentes. Étudier la convergence de la suite (u_n) , et préciser, le cas échéant, sa limite.

Exercice n° 23 (enseignement obligatoire)

Soit E_1 l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = y$.

Soit E_2 l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' = y$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une unique fonction f qui appartient à E_2 , et qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1. Vérifier que les fonctions définies sur \mathbf{R} par $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont des éléments de E_2 .
2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbf{R} , on pose $u = f + f'$.
 - (a) Démontrer que f appartient à E_2 si et seulement si u appartient à E_1 .
 - (b) **Démonstration de cours.**
Prérequis :
 - La fonction $x \mapsto e^x$ est élément de E_1 ;
 - pour tout x réel, $e^x \times e^{-x} = 1$.**Démontrer** l'unicité de la fonction u élément de E_1 qui vérifie $u(0) = 1$.
3. Soit f un élément de E_2 . On pose, pour tout réel x , $g(x) = f(x)e^x$.
 - (a) Démontrer que si f vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, alors $g'(x) = e^{2x}$.
 - (b) Démontrer qu'il existe une seule fonction f répondant au problème posé et déterminer son expression.

Exercice n° 24 (enseignement obligatoire)

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
 - (a) Soient u, v, w, x_0, y_0 des nombres réels tels que $u^2 + v^2 \neq 0$.
Établir une formule donnant la distance du point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) à la droite d'équation $ux + vy + w = 0$.
 - (b) Soient a et b des réels strictement positifs, on considère les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$.
Calculer la distance du point O à la droite AB .
2. Soient a, b, c des réels strictement positifs.
 Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$.
 - (a) Calculer la distance du point C à la droite AB .
 - (b) Montrer la relation

$$\text{Aire}(ABC)^2 = \text{Aire}(OAB)^2 + \text{Aire}(OBC)^2 + \text{Aire}(OCA)^2.$$

Exercice n° 25 (spécialité)

Soit $j = e^{2i\pi/3}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$. On désigne par A l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + bj$, où a et b sont des entiers relatifs.

1. Montrer que, pour tout élément z de A , $|z|^2$ est un entier.
2. Quels sont les éléments z non nuls de A qui sont tels que $\frac{1}{z}$ soit également élément de A ?

Exercice n° 26 (spécialité)

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $u_n = 1! + 2! + \dots + n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (u_n) :

$u_1 = 1$
$u_2 = 3$
$u_3 = 3^2$
$u_4 = 3 \times 11$
$u_5 = 3^2 \times 17$
$u_6 = 3^2 \times 97$
$u_7 = 3^4 \times 73$
$u_8 = 3^2 \times 11 \times 467$
$u_9 = 3^2 \times 131 \times 347$
$u_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1. Montrer que u_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.
2. Peut-on affirmer que u_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?
3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, u_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

Exercice n° 27 (enseignement obligatoire)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On rappelle que pour tout vecteur \vec{w} non nul, d'affixe z , on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$, défini à $2k\pi$ près (avec k entier relatif).

Dans cet exercice, on prend comme prérequis le résultat suivant :

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

1. Soient M , N et P trois points du plan, d'affixes m , n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

(a) **Démontrer** que $\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ (à $2k\pi$ près).

(b) Interpréter géométriquement $\left|\frac{p-m}{n-m}\right|$.

2. En déduire la traduction complexe d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesure θ , θ désignant un nombre réel.

Exercice n° 28 (enseignement obligatoire)

À tout nombre complexe $z = x + iy$ où x et y désignent la partie réelle et la partie imaginaire de z , on associe le nombre complexe $f(z) = e^y(\cos(\pi x) + i \sin(\pi x))$.

1. Déterminer et placer, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, les points d'affixes $f(0)$, $f(i)$, $f(-i)$, $f(1+i)$ et $f(1-i)$.
2. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, démontrer que $f(z)$ est non nul, puis déterminer en fonction de x et y le module et un argument de $f(z)$.
3. (a) Démontrer que pour tous les nombres complexes z et z' , $f(z+z') = f(z)f(z')$ et $f(z-z') = \frac{f(z)}{f(z')}$.
- (b) Démontrer que pour tout entier relatif n , pour tout nombre complexe z , $f(nz) = (f(z))^n$.
4. Soit A le point du plan d'affixe $w = 1+i$. Soient B , C , et D les points d'affixes respectives \bar{w} , $-w$ et $-\bar{w}$
 - (a) Déterminer l'ensemble L des points du plan dont l'affixe $z = x+iy$ vérifie $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| = 1 \end{cases}$ puis déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe $f(z)$, où z est l'affixe d'un élément de L .
 - (b) Déterminer l'ensemble K des points du plan dont l'affixe $z = x+iy$ vérifie $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$ puis déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe $f(z)$, où z est l'affixe d'un élément de K .

Exercice n° 29 (spécialité)

Définition de la congruence modulo 11 : On rappelle que si a et b désignent deux entiers relatifs, on dit que a est congru à b modulo 11, et on écrit $a \equiv b[11]$, si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 11k$.

1. (a) **Démonstration de cours.**
Prérequis : Définition de la congruence modulo 11.
 Démontrer que si $a \equiv b[11]$ et $c \equiv d[11]$ alors $a + c \equiv b + d[11]$ et $ac \equiv bd[11]$.
 (b) En déduire que si $a \equiv b[11]$, alors pour tout n entier naturel on a : $a^n \equiv b^n[11]$.
2. Soit n un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, ce qui signifie que $n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n$.
 Établir que n est divisible par 11 si, et seulement si, le nombre $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$ est multiple de 11.

Exercice n° 30 (enseignement obligatoire)

Soit \mathcal{C} un cercle de rayon 4 cm.

Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont sur le cercle \mathcal{C} ?

Exercice n° 31 (enseignement obligatoire)

1. Démonstration de cours.

Prérequis : Définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant :

Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

- (a) Établir que la suite (u_n) est croissante.
- (b) Démontrer que si la suite (u_n) a pour limite un réel ℓ , alors ℓ vérifie la relation $\ell = \ell + e^{-\ell}$.
- (c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

Exercice n° 32 (enseignement obligatoire)

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de cours suivant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On rappelle la définition et le théorème suivants :

Définition :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A, +\infty[$, où A est un réel positif, et soit L un nombre réel.

Dire que la fonction f a pour limite L en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient tous les nombres $f(x)$ pour x assez grand.

Théorème : Soit L un nombre réel, f , g et h des fonctions définies sur l'intervalle $[A, +\infty[$, où A est un réel positif. Si f , g , et h vérifient les conditions suivantes :

- Pour tout x appartenant à l'intervalle $[A, +\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;
- Les fonctions g et h ont pour limite L en $+\infty$

alors la fonction f a pour limite L en $+\infty$.

1. Démonstration de cours.

En utilisant la définition précédente, démontrer le théorème énoncé ci dessus.

2. Application :

- (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
- (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$ on a les inégalités $0 \leq \ln x \leq \sqrt{x}$.
En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$ on a

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- (c) En déduire la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.



Exercices « étoilés »

Exercice n° 33* (enseignement obligatoire)

Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

Montrer que n^k peut s'écrire comme somme de n entiers impairs consécutifs.

Exercice n° 34* (enseignement obligatoire)

Si a et b sont deux entiers strictement positifs, on désigne par $m(a, b)$ le plus petit des deux nombres $\sqrt[a]{b}$ et $\sqrt[b]{a}$ et on considère l'ensemble $A = \{m(a, b) \mid (a, b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*\}$.

Montrer que A est une partie de \mathbf{R} admettant un plus grand élément que l'on déterminera.

Exercice n° 35* (enseignement obligatoire)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $r = (O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives, dans le repère r , $y = \frac{5}{4}(x + 1)$ et $y = \frac{5}{4e}(x + 5)$.

Déterminer des nombres réels x_1 et x_2 , avec $x_1 \neq x_2$, et une fonction exponentielle f , c'est-à-dire une fonction de la forme $x \mapsto Ce^{kx}$, où C et k sont des constantes réelles, telle que la courbe représentative \mathcal{C}_f de f soit tangente à Δ_1 au point d'abscisse x_1 et à Δ_2 au point d'abscisse x_2 .

Exercice n° 36* (enseignement obligatoire)

Établir que pour tout couple (x, y) de nombres réels on a l'inégalité

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

Exercice n° 37* (enseignement obligatoire)

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbf{R} . On suppose que $f(0) = 1$.

1. On suppose vérifiée, pour tout nombre réel x , la relation $f(x) + f'(x) \leq 0$.
Comparer, pour $x \geq 0$, $f(x)$ et e^{-x} .
2. Soit a un réel positif. On suppose à présent que f vérifie la relation

$$af(x) + f'(x) \leq 0.$$

Que peut-on en déduire pour f ?

3. Dans un processus, une certaine quantité est mesurée par une fonction g du temps t , qui vérifie l'équation différentielle :

$$g'(t) + 0,001g(t) + k(t)g^2(t) = 0$$

où k est une fonction positive de t . Déterminer un instant t_0 tel que l'on puisse affirmer que, pour $t \geq t_0$ la valeur de $g(t)$ est inférieure ou égale à 5% de sa valeur initiale $g(0)$.

Exercice n° 38* (spécialité)

On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$. On appelle *message* tout mot, ayant un sens ou non, formé avec ces dix caractères.

1. On désigne par f la fonction définie sur Ω par « $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de 5^n par 11 ».

On désire coder à l'aide de f le message « BACF ».

Compléter la grille de chiffrement ci-dessous :

Lettre	B	A	C	F
n	2	1	3	6
$f(n)$	3			
Lettre	C			

Peut-on déchiffrer le message codé avec certitude ?

2. On désigne par g la fonction définie sur Ω par « $g(n)$ est le reste de la division euclidienne de 2^n par 11 ». Établir, sur le modèle précédent, la grille de chiffrement de g . Permet-elle le déchiffrement avec certitude de tout message codé à l'aide de g ?
3. Le but de cette question est de déterminer des conditions sur l'entier a compris entre 1 et 10 pour que la fonction h définie sur Ω par « $h(n)$ est le reste de la division euclidienne de a^n par 11 » permette de chiffrer et déchiffrer avec certitude un message de 10 caractères. Soit i un élément de Ω .
- Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si, pour tout $i \in \Omega$, $i < 10$, a^i n'est pas congru à 1 modulo 11, alors la fonction h permet le déchiffrement avec certitude de tous messages.
 - Montrer que s'il existe $i \in \Omega$, $i < 10$, tel que $a^i \equiv 1[11]$, alors la fonction h ne permet pas de déchiffrer un message avec certitude.
 - On suppose que i est le plus petit entier naturel tel que $1 \leq i \leq 10$ vérifiant $a^i \equiv 1[11]$. En utilisant la division euclidienne de 10 par i , prouver que i est un diviseur de 10.
 - Quelle condition doit vérifier le nombre a pour permettre le chiffrement et déchiffrement avec certitude de tous messages à l'aide de la fonction h ? Faire la liste de ces nombres.
-