Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}.$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0~;~+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.
2. **a.** Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

sur $[1~;~+\infty[$.

b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1~;~+\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1~;~+\infty[$.

c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$\mathrm{I} = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$ dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

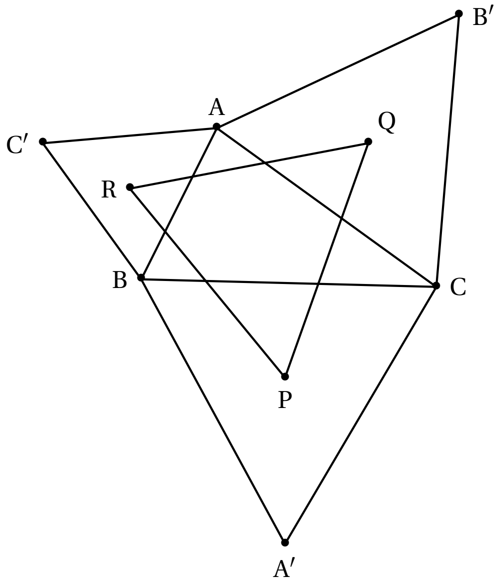
$$\mathscr{V} = \int_0^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

a. Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

b. Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA′, ACB′ et ABC′. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles B CA′, ACB′ et ABC′.



On note $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ p,\ q$ et r les affixes respectives des points A, B, C, A′, B′, C′, P, Q et R.

1. **a.** Traduire, avec les affixes des points concernés, que C′ est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

b. Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.

2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.

3. En déduire que les triangles ABC, A′B′C′ et PQR ont même centre de gravité.

4. Montrer que :

$$3(q - p) = (b' - c) + (c - a') + (a - b).$$

On admettra que, de même :

$$3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b).$$

5. Justifier les égalités suivantes :

$$a - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b' - c)\ ;\ b - a' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a')\ ;\ c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - b).$$

6. Déduire des **questions 4.** et **5.** que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 3 (OBLIGATOIRE) — **5 points**

$\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.

Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M distinct de O, d'affixe z , associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, on appelle E′ son image par F. Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K′ l'image de K par F. Calculer l'affixe de K′.

b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$; R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z'+1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.
En déduire que $|z'+1| = |z'|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ décrit l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat de **a.**.

Exercice 3 (spécialité) — 5 points

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.
4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :
$$24x+35y=9$$
est l'ensemble des couples :
$$(-144+70k\ ;\ 99-24k) \text{ où } k\in\mathbb{Z}.$$
5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{3}$ alors $g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$..
6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = \mathrm{i}\overline{z}+(1-\mathrm{i})$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

Exercice 4 — 5 points

Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.

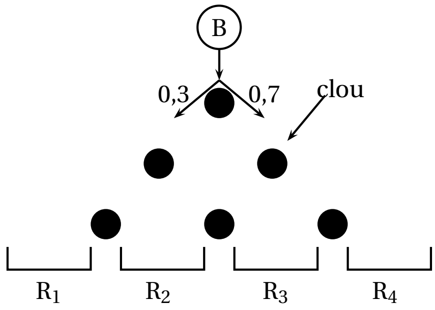
Les trois questions sont indépendantes.

1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que
   - si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
   - le test est positif pour 3 % des personnes saines.

   Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

   ☐ 0,95 ☐ 0,9 ☐ 0,15 ☐ 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type :



On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés R_1, R_2, R_3 et R_4. À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (gauche et droite relatives à l'observateur).
On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4.
Que valent p_1 et p_2 ?

☐ $p_1 = p_2 = 0,5$	☐ $p_1 = 0,216$ et $p_2 = 0,784$
☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,532$	☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,432$.

3. Les 1 000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3233066470 9384460959 0582235725 3594085234
8111745028 4102701930 5211055596 4462294895 4930301964
4288109756 6593344612 8475648233 7867831652 7120190914
5648566923 4603486534 5432664825 3393607260 2491412737
2450700660 6315580574 8815209209 6282925409 1715364367
8925903600 1133053054 8820466525 3841469519 4151160943
3057270365 7595919530 9218611738 1932611793 1051185480
7446297996 2749567355 8857527240 9122793318 3011949129
8336733624 4065664308 6025394946 3952247371 9070217986
0943702770 5392171762 9317675238 4674818467 6691051320
0056812714 5263560827 7857753427 9778900917 3637178721
4684409012 2495343054 6549585371 0507922796 8925892354
2019956112 1290219608 6403441815 9813629774 7713099605
1870721134 9999998372 9780499510 5973173281 6096318599
0244594553 4690830264 2522300253 3446850352 6193110017
1010003137 8387528865 8753320830 1420617177 6691473035
9825349042 8755460731 1595620633 8235378759 3751957781
8577805321 7122600661 3001927876 6111959092 1642019894
En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} \left(f_k - 0,1\right)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.
On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile (d_1 et d_9), le premier et troisième quartile (Q_1 et Q_3) et la médiane (Me) :

$d_1 = 0,000422$; $Q_1 = 0,000582$; Me $= 0,000822$; $Q_3 = 0,001136$; $d_9 = 0,00145$.

En effectuant le calcul de d_2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :

☐ 0,000456 ☐ 0,00456 ☐ 0,000314

Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

☐ Oui ☐ Non ☐ Il ne peut pas conclure.