

Durée : 4 heures

Baccalauréat S France septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

- a. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

- b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x \, dx.$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$, avec p et q rationnels.

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0; +\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

La courbe \mathcal{C} représentative de la fonction h est donnée en annexe; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.
- b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h .
Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.
- c. Déterminer l'intersection de la courbe \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0; \frac{1}{e}\right[$.
Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1; e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e; +\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.
Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).
4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1; e[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e; +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).
Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes
- a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?
- b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?
- c. Déterminer les variations de la fonction s . Dresser le tableau de variations de s .
5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.

Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,

C1 : « la particule entre dans K1 »,

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.

Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.

La demi-vie¹ des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

EXERCICE 4**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{et} \quad b = 4\sqrt{3} + 4i.$$

a. Écrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; -1), (D ; + 1), (B ; + 1).

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 4**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

¹temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = +\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD .

Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M .

Partie A

1. Placer les points D , G et M sur la figure de la feuille annexe.
2. Montrer que les points O , D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M .

Partie B

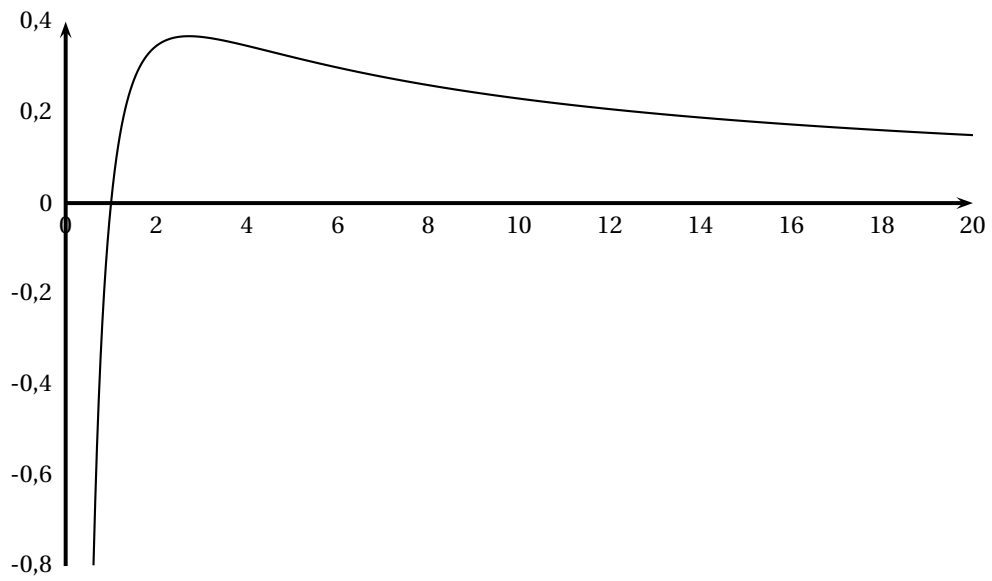
Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1 .

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = +\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$.
Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s .
3. Montrer que l'image E' du point E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ .
4. On note \mathcal{C} le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C .
Montrer que le point E appartient à \mathcal{C} .
Soit O' l'image du point O par la similitude s . Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE .
En déduire une construction de \mathcal{C} .

ANNEXE DE L'EXERCICE 2

À rendre avec la copie



Courbe \mathcal{C} , obtenue à l'aide d'un traceur de courbes