Baccalauréat S Géométrie

Index des exercices de géométrie de 1999 à avril 2006

Tapuscrit : Denis Vergès

N°	Lieu et date	Q.C.M.	Barycentre	Espace
1	Pondichéry avril 2006	×		×
2	Amérique du Sud novembre 2005			×
3	Polynésie septembre 2005	×		×
4	France septembre 2005			×
5	Asie juin 2005	×		×
6	Centres étrangers juin 2005		×	×
7	La Réunion juin 2005			×
8	Liban juin 2005	×	×	
9	Polynésie juin 2005			×
10	Pondichéry juin 2005			×
11	Nlle–Calédonie nov. 2004			×
12	Antilles septembre 2004		×	
13	Amérique du Nord mai 2004	×	×	
14	Antilles juin 2004			×
15	France juin 2004			×
16	Nlle–Calédonie mars 2004		×	×
17	Nlle–Calédonie nov. 2003			×
18	Polynésie sept. 2003			×
19	Asie juin 2003			×
20	France juin 2003			×
21	La Réunion juin 2003			×
22	Polynésie juin 2003			×
23	Nlle–Calédonie déc. 2001		×	×
24	Amérique du Nord juin 2001			×
25	France juin 2001		×	×
26	Nlle–Calédonie déc. 2000			×
27	France septembre 2000		×	×
28	Polynésie septembre 2000			×
29	Amérique du Nord juin 2000			×
30	Centres étrangers juin 2000			
31	Nlle–Calédonie déc. 1999			
32	France juin 1999			
33	Liban juin 1999		×	
34	Pondichéry juin 1999		×	
35	Amérique du Sud novembre 1998			
36	France septembre 1998			
37	Polynésie septembre 1998			

1. Pondichéry avril 2006

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cx + d = 0$.
On considère le point I de coordonnées $\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_1,\ y_1$ et z_1, un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.

a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$.

b. Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_1,\ y_1$ et z_1.

c. En déduire que $IH = \dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathscr{Q}$

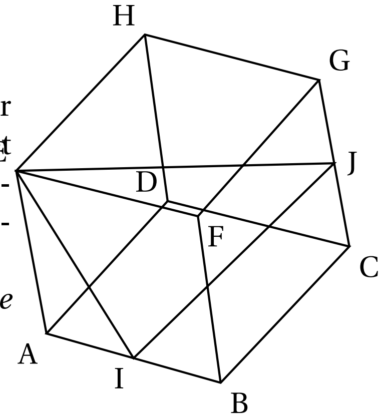
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{Q}$.

2. Amérique du Sud novembre 2005

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 *point. Toute réponse erronée enlève* 0,1 *point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.*

On donne le cube ABCDEFGFH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.

Le candidat est appelé à juger chacune des 10 *affirmations suivantes.*



On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
1.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$	
2.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$	
3.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$	
4.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos\frac{\pi}{3}$	

On utilise à présent le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
5.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & t \end{array}\right.$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
6.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \frac{1}{2}t+1 \\ y & = & t+1 \\ z & = & \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{array}\right.$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$	
7.	$6x-7y+8z-3=0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8.	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par l et par le milieu de l'ar ête [DC].	
9.	Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10.	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$.	

3. Polynésie septembre 2005

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par une transformation simple que l'on précisera.

2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).

   a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.

   b. Tracer $\mathscr{H}$ dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   On nomme A et B les points de la courbe d'abscisses respectives -3 et 3.
   On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan constitué des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant :

$$-3 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } \sqrt{x^2+16} \leqslant y \leqslant 5.$$

   Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ et exprimer l'aire de $\mathscr{D}$ à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. **a.** Donner l'écriture complexe de r.

   b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image du point $M(x\,;\,y)$ du plan.

   Vérifier que $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{array}\right.$

   Déterminer les coordonnées des points A′ et B′, images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A′ et B′ dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2. Soit $\mathscr{H}'$ l'hyperbole d'équation $xy = 8$.

   a. Tracer $\mathscr{H}'$ dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b. Montrer que $\mathscr{H}'$ est l'image de $\mathscr{H}$ par la rotation r.

3. Soit $\mathscr{D}'$ l'image de $\mathscr{D}$ par la rotation r. On admet que $\mathscr{D}'$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4\sqrt{2}$ et $\dfrac{8}{x} \leqslant y \leqslant 5\sqrt{2} - x$.

a. Hachurer $\mathscr{D}'$.

b. Calculer l'aire de $\mathscr{D}'$,exprimée en cm^2.
En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de $\mathscr{D}$.

4. France septembre 2005

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2~;~1~;~5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.

b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2~;~-1~;~1)$.

c. Soit le point A(5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.

d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. a. Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t~;~3-t~;~t)$.
Déterminer en fonction de t la longueur AM. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

c. Interpréter géométriquement la valeut de ce minimum.

5. Asie juin 2005

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+2t\\ y &=& 2-t\\ z &=& -3-t\end{array}\right.$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$.

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point N de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ appartient à $\mathscr{D}$	Le point R de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à $\mathscr{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$
3.	$\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$	$\mathscr{D}$ est sécante à $\mathscr{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; -2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathscr{P}$	Le point G de coordonnées $(1\,3 ; -1)$ appartient à $\mathscr{P}$
5.	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ plan $\mathscr{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathscr{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathscr{P}$ est : $2\sqrt{3}$

6. Centres étrangers juin 2005

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec AB = AC = AD = a. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).
   $\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}.\right)$
2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.
3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].
   a. Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.
   b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que
   $$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|.$$
4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.
   a. Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
   b. Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
   c. En déduire que HC = HD.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

7. La Réunion juin 2005

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.

Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points A(3 ; 2 ; −1), B(−6 ; 1 ; 1), C(4 ; −3 ; 3) et D(−1 ; −5 ; −1).

1. **a.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$.

   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$.

   d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?

2. On définit les points 1(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0), K(0 ; 0 ; 1). Le tétraèdre OIJK est-il orthocentrique ?

8. Liban juin 2005

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci -dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.

Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\ ;\ +\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. »
2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$, g ne s'annulant pas :

   « Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ ».
3. « Si $f$est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ »
4. On considère un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

   « Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ».
5. « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)\text{e}^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)\text{e}^x$ ».
6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.

   « Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $3, -2$ et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».
7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1

   « L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».
8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

   « Le produit scalaire $\overrightarrow{M\text{A}} \cdot \overrightarrow{M\text{B}}$ est nul si et seulement si $M = \text{A}$ ou $M = \text{B}$ ».

9. Polynésie juin 2005

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(−6 ; 2 ; 1).

Le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne $x+2y+2z=5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{M\text{A}}-\overrightarrow{M\text{B}}\right\|=2$ est :

   a. un plan de l'espace **b.** une sphère **c.** l'ensemble vide.

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ sont :

   a. $\left(\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ **b.** $\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$ **c.** $\left(\dfrac{7}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

3. La sphère de centre B et de rayon 1 :

   a. coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle ;

   b. est tangente au plan $\mathscr{P}$;

   c. ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$.

4. On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+2t\\ y &=& 3+t \quad (t\in\mathbb{R}).\\ z &=& t\end{array}\right.$

   Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

   a. coplanaires et parallèles **b.** coplanaires et sécantes **c.** non coplanaires.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

   a. la droite d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -\dfrac{3}{2}-t\\ y &=& \dfrac{3}{2}-7t\\ z &=& 2+t\end{array}\right.\ (t\in\mathbb{R})$.

   b. le plan d'équation cartésienne $9x-y+2z+11=0$.

   c. le plan d'équation cartésienne $x+7y-z-7=0$.

10. Pondichéry juin 2005

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\,;\,1\,;\,1)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,4\,;\,-2)$.
   Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.

   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

   b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

   a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

   b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

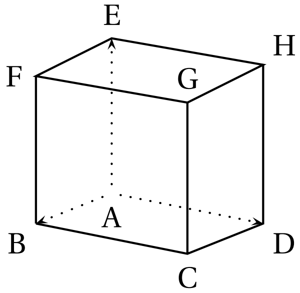
11. Nouvelle–Calédonie novembre 2004

Cet exercice est un questionnaire choix multiples (Q.C.M.)

Les réponses cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe .
Toute réponse ambigu sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent $\frac{1}{2}$ point.



Soit ABCDEFGH un cube de ct 1.
On choisit le repre orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].

L est le barycentre de $\{(\text{A}, 1) ; (\text{B}, 3)\}$.

Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

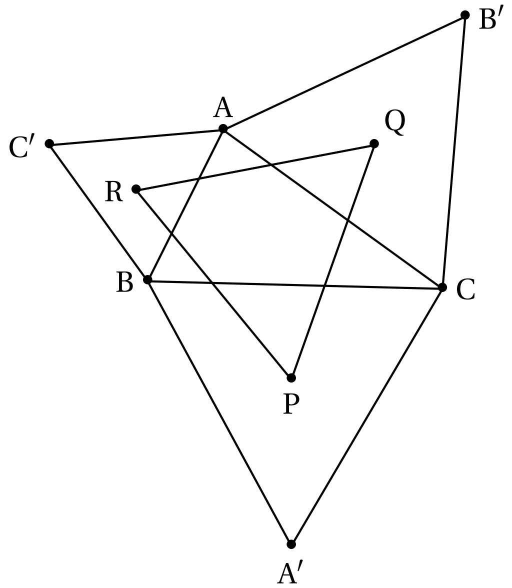
1. Les coordonnées de L sont :
   a. $\left(\dfrac{1}{4} ; 0 ; 0\right)$ **b.** $\left(\dfrac{3}{4} ; 0 ; 0\right)$ **c.** $\left(\dfrac{2}{3} ; 0 ; 0\right)$
2. Le plan (π) est le plan
   a. (GLE) **b.** (LEJ) **c.** (GFA)
3. Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées
   a. $\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{5}\right)$ **c.** $\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{3}\right)$
4. **a.** Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport B.

   b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.

   c. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
5. Le volume du tétraèdre FIJM est :
   a. $\dfrac{1}{36}$ **b.** $\dfrac{1}{48}$ **c.** $\dfrac{1}{24}$

12. Antilles–Guyane septembre 2004

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA′, ACB′ et ABC′. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles B CA′, ACB′ et ABC′.



On note $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ p,\ q$ et r les affixes respectives des points A, B, C, A′, B′, C′, P, Q et R.

1. **a.** Traduire, avec les affixes des points concernés, que C′ est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

b. Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.

2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.

3. En déduire que les triangles ABC, A′B′C′ et PQR ont même centre de gravité.

4. Montrer que :

$$3(q - p) = (b' - c) + (c - a') + (a - b).$$

On admettra que, de même :

$$3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b).$$

5. Justifier les égalités suivantes :

$$a - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b' - c)\ ;\ b - a' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a')\ ;\ c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - b).$$

6. Déduire des **questions 4.** et **5.** que le triangle PQR est équilatéral.

13. Amérique du Nord mai 2004

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(\mathrm{A},\ 1),\ (\mathrm{B},\ m),\ (\mathrm{C},\ 2m)\}.$$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 *point, chaque réponse fausse ou illisible enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à* 0.

Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	**V ou F**
G_1 est le milieu du segment [CI].	
G_1 est barycentre de $\left\{(\mathrm{J},\ 2),\ \left(\mathrm{C},\ \frac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.	
Pour tout m, distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}G_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AG}_{-1}}$.	
$\mathrm{IBG}_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

14. Antilles–Guyane juin 2004

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. **a.** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ -1)\ ;\ (D,\ 1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

   b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
   Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

   c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

   a. Précisez l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

   b. Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

   c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

   d. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{E}$.

15. France juin 2004

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 1/2 point l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne le point S(1 ; −2 ; 0) et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$\text{A}: \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & -3 \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \text{B}: \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 1-3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

$$\text{C}: \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & -2-2t \\ z & = & 3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \text{D}: \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & -1+t \\ z & = & -3-3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$\text{A}: (-4\,;0\,;0) \quad \text{B}: \left(\frac{6}{5}\,;\frac{-9}{5}\,;\frac{3}{5}\right) \quad \text{C}: \left(\frac{7}{9}\,;\frac{-2}{3}\,;\frac{1}{3}\right) \quad \text{D}; \left(\frac{8}{11}\,;\frac{-25}{11}\,;\frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$\text{A}: \frac{\sqrt{11}}{3} \quad \text{B}: \frac{3}{\sqrt{11}} \quad \text{C}: \frac{9}{\sqrt{11}} \quad \text{D}: \frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale

A : au point I(1 ; −5 ; 0)

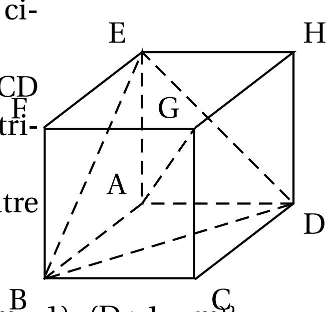
B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \dfrac{3\sqrt{10}}{11}$.

16. Nouvelle–Calédonie mars 2004

On considère Ie cube ABCDEFGH ci-contre.
O_1 et O_2 sont Ies centres des carrés ABCD et EFGH, et I est Ie centre de gravité du triangle EBD.
Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :



$$\{(\mathrm{E}\,;\,1),\ (\mathrm{B}\,;\,1-m),\ (\mathrm{G}\,;\,2m-1),\ (\mathrm{D}\,;\,1-m)\}$$

.

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
3. Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont aIignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. **a.** Vérifier que les points A, G_m, E et O_1, sont coplanaires.

   b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

17. Nouvelle–Calédonie novembre 2003

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$; on considère les points A(3 ; 0 ; 10), B(0 ; 0 ; 15) et C(0 ; 20 ; 0).

1. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E(9 ; 0 ; 0).

   c. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

   a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

   c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne

   $$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$

   d. Montrer que le système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ 4y - 3z & = & 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 & = & 0 \end{array}\right.$ a une solution unique. Que représente cette solution ?

   e. Calculer la distance OH, en déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en **2. c.** ?

18. Polynésie septembre 2003

L'espace est rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit s un nombre réel.

On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -5+3s \\ y & = & 1+2s \\ z & = & -2s \end{array}\right.$$

1. **a.** Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

b. Démontrer que $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires.

2. **a.** Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2~;~-2~;~1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$ est indépendante de M.

c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan $(x\text{O}y)$.

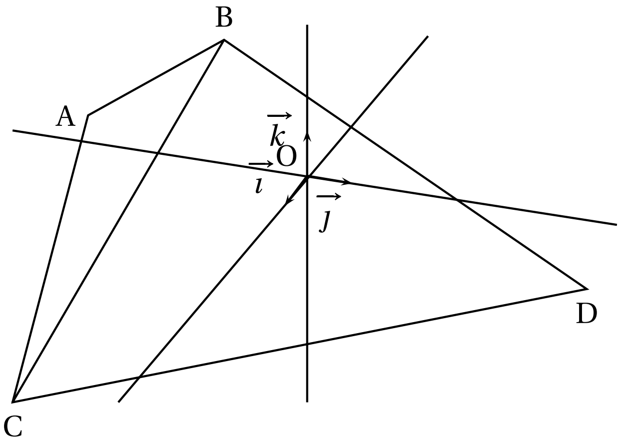
3. La sphère $\mathcal{S}$ est tangente à $\mathcal{P}$ au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de $\mathcal{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathcal{P}$, du même côté que O.

Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

19. Asie juin 2003

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

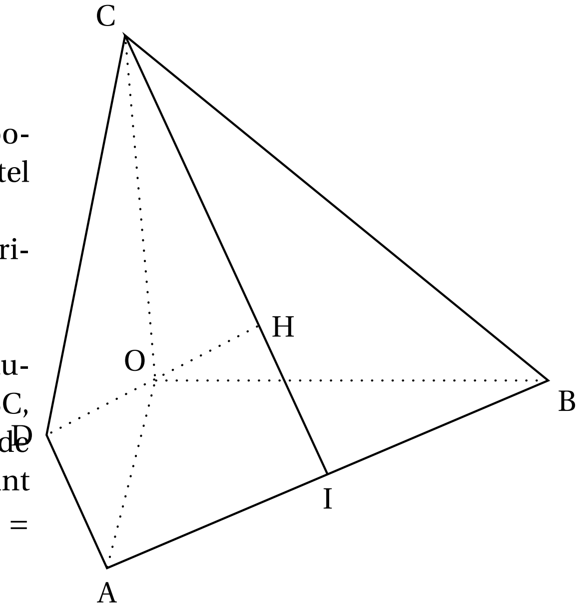
$$A(3\,;\,-2\,;\,2) \quad ; \quad B(6\,;\,1\,;\,5) \quad ; \quad C(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit P′ le plan orthogonal la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de P′.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P′.

20. France juin 2003



Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,

• OA = OB = OC = a.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{\mathrm{HO}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH

   a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.

   b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH = $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre ABCD.

   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$.

   a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$.

   b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

   c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

21. La Réunion juin 2003

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.
2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\left\{\left(M\,;\,a^2\right),\ (\mathrm{B}\,;\,1),\ (\mathrm{D}\,;\,1)\right\}.$$

   a. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{B}K}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{B}M}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

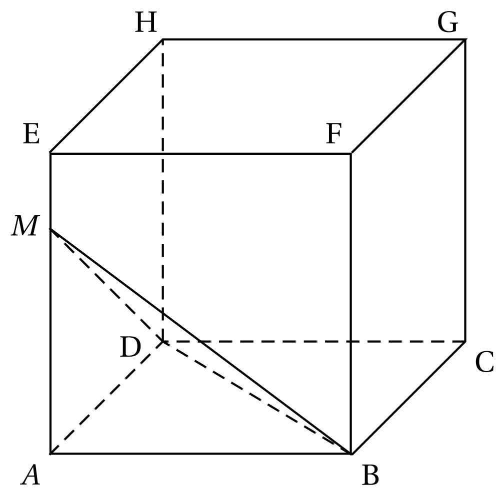
   b. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{B}K}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}K}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{B}K}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{D}} = 0$.

   c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{D}K}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$.

   d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{\mathrm{A}K}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}K}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{D}} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
4. **a.** Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

   b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.

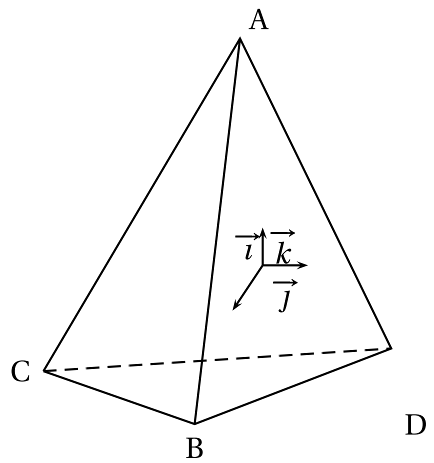


22. Polynésie juin 2003

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :
$A(0\,;0\,;3)$, $B(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1)$, $C(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1)$, $D(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;-1)$.

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.

   Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.

   Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

23. Nouvelle–Calédonie décembre 2001

Partie I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1~;~0~;~2),\quad (3~;~2~;~-4),\quad (1~;~-4~;~2),\quad (5~;~-2~;~4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. **a.** Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.

   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :

   $$8x+9y+5z-12=0.$$

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.

   d. Montrer que :

   $$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Partie II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et Ldéfinis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Soit G le barycentre de (A, 3), (B, 3), (C, 1), D, 1).

1. Déterminer les barycentres de (A, 3), (D, 1) et le barycentre de (B, 3), (C, 1).
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

24. Amérique du Nord juin 2001

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les trois points A (2 ; 0 ; 0), B (1 ; 1 ; 0) et C (3 ; 2 ; 6). (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (0 ; 1 ; 1) et (Δ) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}$ (1 ; - 2 ; 2).

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites (D) et (,à) puis montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.

2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (question hors programme en 2002), puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le projeté orthogonal du point F(2 ; 4 ; 4) sur le plan (ABC).

a. Expliquer pourquoi il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{FH} = k\vec{w}$.

b. Déterminer la valeur de k et en déduire les coordonnées de H.

c. Calculer le volume du tétraèdre FABC.

25. France juin 2001

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle [- 1 ; 1].
On note G_k le barycentre du système $\{(\text{A}, k^2+1), (\text{B}, k), (\text{C}, -k)\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle [- 1 ; 1], on a l'égalité :

$$\overrightarrow{\text{A}G_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{\text{BC}}.$$

b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur [- 1 ; 1] par

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$

c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle [- 1 ; 1].
Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\| = \|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\| = \|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0 ; 0 ; 2)$, $(-1 ; 2 ; 1)$ et
$(-1 ; 2 ; 5)$. Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.
Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.

b. Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de (E) et (F).

26. Nouvelle–Calédonie décembre 2000

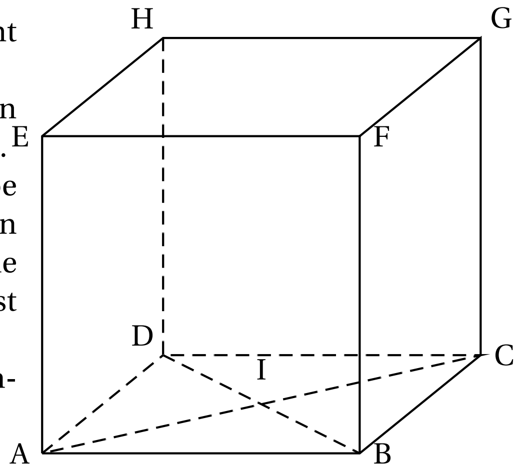
Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :
A(4 , 0, 0), B(2, 4, 0), C(0, 6, 0), S(0, 0, 4), E(6, 0, 0) et F(0, 8, 0)

1. Réaliser une figure comportant les points définis dans l'exercice que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA).
3. On admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC).
   - **a.** Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{SE} \wedge \overrightarrow{EF}$. En déduire l'équation cartésienne du plan (SEF).
   - **b.** Calculer les coordonnées du point A′ barycentre des points pondérés
     (A, 1) et (S,3).
   - **c.** On considère le plan P parallèle au plan (SEF) et passant par A′. Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $4x+3y+6z-22=0$.
4. Le plan P coupe les arêtes [SO], [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement aux points O′, A′, B′ et C′.
   - **a.** Déterminer les coordonnées de O′.
   - **b.** Vérifier que C′ apour coordonnées $\left(0,\ 2,\ \dfrac{8}{3}\right)$.
   - **c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (SB), en déduire les coordonnées du point B′.
5. Vérifier que O′A′B′C′ est un parallélogramme.

27. France septembre 2000

Enseignement obligatoire (hors-programme en 2002)

Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes.
L'espace est muni d'un repère orthonormal direct.
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face ABCD est le point I.
Aucune figure n'est demandée sur la copie.



1. **a.** Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

   b. En déduire l'ensemble ($\mathscr{E}$) des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BC}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}.$$

   c. Déterminer l'ensemble ($\mathscr{F}$) des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

2. On appelle P le barycentre du système { (A, 2) ; (C, - 1)}.

   a. Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

   b. Soit ($\mathscr{G}$) l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

   Déterminer l'ensemble ($\mathscr{G}$).
   Montrer que le point A appartient à l'ensemble ($\mathscr{G}$).

28. Polynésie septembre 2000

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1. **a.** Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

   b. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ est nul.

   c. Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}$ est nul.

   d. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

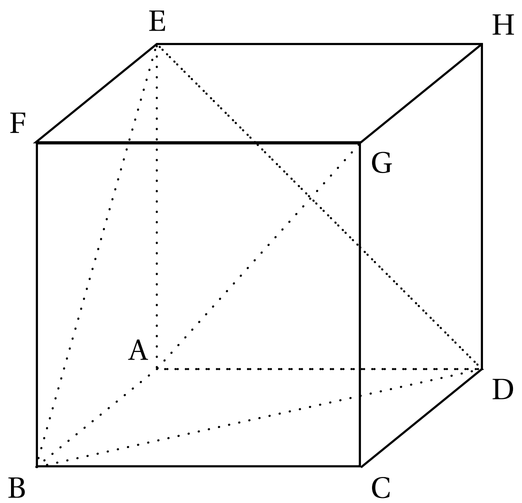
2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Déduire de **1) a)** que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE), et préciser la position du point I sur le segment [AG].
3. Dans cette question, l'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

   a. Écrire une équation du plan (BDE).

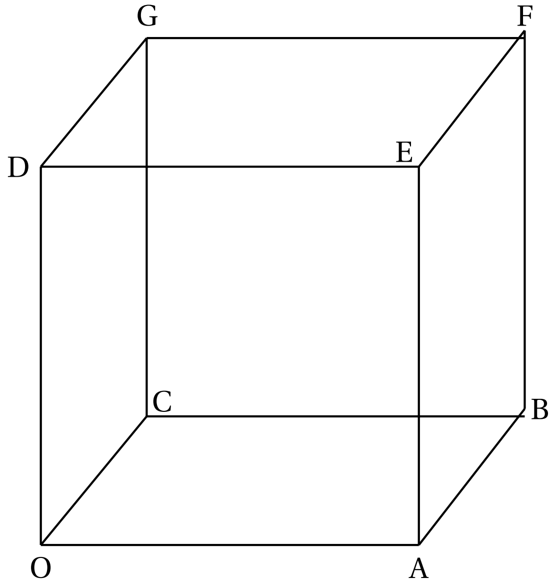
   b. Écrire une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

   c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite Δ avec le plan (BDE).

   d. En déduire la distance du point H au plan (BDE).



29. Amérique du Nord juin 2000



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.
L'espace est orienté par le repère orthonormai direct $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OD}}\right)$.
On désigne par a un réel strictement positif.
L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{\text{O}L} = a\overrightarrow{\text{OC}}$, $\overrightarrow{\text{O}M} = a\overrightarrow{\text{OA}}$, et $\overrightarrow{\text{B}K} = a\overrightarrow{\text{BF}}$.

1. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{D}M} \wedge \overrightarrow{\text{D}L}$.

   b. En déduire l'aire du triangle DLM.

   c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

   a. Démontrer que $\overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{\text{O}K} = \overrightarrow{\text{O}H} \cdot \overrightarrow{\text{O}K}$.

   b. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{O}H}$ et $\overrightarrow{\text{O}K}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{\text{O}H} = \lambda\overrightarrow{\text{OK}}$.
   Démontrerque $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

   c. Déterminer les coordonnées de H.

   d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{O}K}$. En déduire que $HK = \dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

30. Centres étrangers juin 2000

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que

AB = BC = CD = DA = 5 et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] , [DA] et [BD].

On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(\text{A}) = \text{B}$, $f(\text{B}) = \text{O}$, $f(\text{D}) = \text{C}$.

a. Prouver que f est un antidéplacement.

b. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D.

c. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

a. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.

b. A-t-on $f = \sigma \circ r$?

3. Soit s_1, la symétrie orthogonale d'axe (BC).

a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2, telle que $r = s_2 \circ s_1$.

b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, , où t_1 est une translation que l'on précisera.

4. Soit t_2 la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.

a. Déterminer $g(\text{D})$, $g(\text{I})$, $g(\text{O})$. En déduire la nature précise de la transformation g.

b. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

31. Nouvelle–Calédonie décembre 1999

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; −1 ; 2) et C(1 ; −1 ; 0).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
2. Soit D le point de coordonnées (1, 1, - 2). Calculer le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{DA}$ et du vecteur $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$.
3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan ABC.

   c. Calculer DH (distance du point D au plan ABC).
4. Calculer les coordonnées du point D′, symétrique du point D par rapport au plan ABC.

32. France juin 1999

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.
On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$.
L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.
Soit t un réel de $[-\pi\ ;\ \pi]$ et m le point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) & = & \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{array}\right.\quad ,\ t \in [-\pi\ ;\ \pi].$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).

2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.

3. Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0\ ;\ \pi]$.

4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de y sur $[0\ ;\ \pi]$.

5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0\ ;\ \pi]$.

6. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0\ ;\ \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

33. Liban juin 1999

Sur une droite (D) muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives -4 et 3. Pour tout entier naturel n, on note

$$A_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\ ;\ 1),\ (B_n\ ;\ 4)\}$$

$$B_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\ ;\ 3),\ (B_n\ ;\ 2)\}$$

1. Placer les points A_0, B_0,A_1, B_1.
2. Les points A_n et B_n ont pour abscisses a_n et b_n respectivement. Ainsi, $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$.

   Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.
3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$.

   b. En déduire que : $a_{n+1} = -\dfrac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{2}{5}b_n$.
4. **a.** Exprimer a_n et b_n à l'aide de n.

   b. Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.

   c. Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n.

34. Pondichéry juin 1999

On considère un triangle ABC du plan.

1. **a.** Déterminer et construire le point G, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ -1)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ 1)].$$

   b. Déterminer et construire le point G′, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ 5)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ -2)].$$

2. **a.** Soit J le milieu de [AB].
   Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{GG}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG}'}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et en déduire l'intersection des droites (CG′) et (AB).

   b. Montrer que le barycentre I de [(B ; 2) ; (C ; - 1)] appartient ? (GG′).

   c. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [GA].

3. Déterminer trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ a)\ ;\ (\mathrm{D}\ ;\ d)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ c)].$$

4. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ a')\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ c')].$$

35. Amérique du Sud novembre 1998

Dans le plan (P), on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1)}.
2. On désigne le point M un point quelconque de (P).
   a. Montrer que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.
   b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que
   $$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \|\vec{V}\|$$
3. On considère le système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n)} où n est un entier naturel fixé.
   a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2.
   b. Montrer que le point G_n appartient au segment [AH].
   c. Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.
   Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.
   d. Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que
   $$\left\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\right\| = n\left\|\vec{V}\right\|.$$
   Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A.
   En préciser le centre et le rayon, noté R_n.
   e. Construire E_2.

36. France septembre 1998

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2. Soit (Q) le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

   et (Q′) le plan de repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

   a. Pourquoi (Q) et (Q′) sont-ils sécants ?

   b. Donner un point E et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q′).

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$\text{J}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

37. Polynésie septembre 1998

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, nous considérons les points A de coordonnées (0 ; 6 ; 0), B de coordonnées (0 ; 0 ; 8), C de coordonnées (4 ; 0 ; 8).

1. **a.** Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique : 1 cm).

   b. Démontrer que :
   - les droites (BC) et (BA) sont orthogonales ;
   - les droites (CO) et (OA) sont orthogonales ;
   - la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).

   c. Déterminer le volume, en cm^3, du tétraèdre OABC.

   d. Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont vous déterminerez le centre et le rayon.

2. À tout réel k de l'intervalle ouvert $]0 ; 8[$, est associé le point $M(0 ; 0 ; k)$. Le plan (π) qui contient M et est orthogonal à la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q.

   a. Déterminer la nature du quadrilatère $(MNPQ)$.

   b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ? Pour quelle valeur de k, la droite (MP) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?

   c. Déterminer MP^2 en fonction de k. Pour quelle valeur de k, la distance PM est-elle minimale ?

❦ Livret réalisé grâce à Cocoa booklet. Merci à son auteur Fabien Cornus. ❦
http ://www.iconus.ch/fabien/cocoabooklet/